PERIODICAL
UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY
5836-171

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

NEUE FOLGE
DER MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK
UNTER MITWIRKUNG DER
ÖSTERREICHISCHEN MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON
J. RADON
WIEN

SCHRIFTLEITUNG
N. HOFREITER
WIEN

60. BAND, 1. HEFT
MIT 3 TEXTABBILDUNGEN
AUSGEGEBEN IM MÄRZ 1956

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1956

QA1
M877
v. 60-61
Mh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von 300 bis 400 Seiten vereinigt werden. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien, IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden; alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5, Tel. U 26 5 60 Serie, Telegrammadresse: Springerbuch Wien.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beigelegten Bestellzettel bei der Rücksendung der korrigierten Fahnen erfolgen.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben. Sie können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur mit Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Autorenkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie zehn Prozent der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Der Verlag

60. Band/1. Heft — Inhaltsverzeichnis

Seite

Schmidt, W. Eine neue Abschätzung der kritischen Determinante von Sternkörpern 1

Hejtmanek, J. Über eine Klassenteilung der Sternkörper 11

Barner, M. Kinematische Fragen in der Projektivgeometrie der Regelflächen 21

Rembs, E. Randvorgaben bei infinitesimaler Verbiegung einfach zusammenhängender konvexer Flächen 57

Kautny, W. Zur Geometrie des harmonischen Umschwungs 66

Buchbesprechungen 83

Eine neue Abschätzung der kritischen Determinante von Sternkörpern

Von

W. Schmidt, Wien

(Eingelangt am 9. Mai 1955)

§ 1

Sei S ein abgeschlossener Sternkörper im R_n, beschränkt, symmetrisch um den Ursprung. Mit Γ seien Punktgitter bezeichnet, mit $d(\Gamma)$ deren Determinante. Man nennt Γ zulässig für S, falls das Innere von S mit Γ nur den Ursprung gemeinsam hat.

Wie üblich definiere ich nun $\Delta(S) = \inf d(\Gamma)$ über alle Γ, welche zulässig sind für S. Es gibt nach dem Auswahlsatz von *Mahler* ein zulässiges Gitter Γ mit $d(\Gamma) = \Delta(S)$. Unter $V(S)$ soll das Jordansche Maß von S verstanden werden. Weiter schreibe ich

$$Q(S) = \frac{V(S)}{\Delta(S)}.$$

Minkowski hat bereits vermutet, daß gilt

$$Q(S) \geqq 2\,\zeta(n). \tag{1}$$

Dabei bedeutet $\zeta(n)$ die Riemannsche ζ-Funktion. Der erste Beweis für diese Tatsache stammt von *E. Hlawka*[1], seither sind mehrere Beweise dafür gegeben worden und es wurde vermutet, daß (1) die beste Schranke ist. Es ist sehr schwierig, Sternkörper anzugeben, deren $Q(S)$ möglichst klein ist.

So hat z. B. *K. Ollerenshaw*[2] im R_2 ein S angegeben mit $Q(S) = 3.512\ldots$

Es ist mir nun gelungen, eine Schar von Schranken anzugeben, welche für $n > 2$ Ungleichung (1) verbessern. Denken wir uns die Primzahlen der Reihe nach geordnet: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, p_4, p_5, ... und

[1] *E. Hlawka*, Math. Zeitschrift **49** (Berlin 43/44), 285—312.

[2] *K. Ollerenshaw*, Proc. Camb. phil. Soc. **49** (1952), 184—200.

durchnummeriert. Es ist zweckmäßig, $p_0 = 1$ zu setzen. Dann erklären wir die Zahlen a_k, b_k, a durch

$$a_0 = 1,\ a_k = a_{k-1} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p_k}, \qquad \text{z. B.: } a_1 = \frac{3}{2},\ a_2 = \frac{5}{2}$$

$$b_0 = 1,\ b_k = (b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_{k-1})(p_k - 1) + 1, \quad \text{z. B.: } b_1 = 2,\ b_2 = 7$$

$$a = \lim_{k \to \infty} a_k;\ a = 1.7090\ldots$$

Wir behaupten nun folgenden *Satz*: Für jedes ganze k gilt die Abschätzung

$$Q(S) \geqq 2\,\zeta(n) \cdot \frac{a_k}{\sum_{j=0}^{k} \frac{b_j}{(p_j)^n}}.^{3} \tag{2}$$

Für $k = 0$ reduziert sich (2) auf (1), $k = 1$ liefert

$$Q(S) \geqq 2\,\zeta(n)\,\frac{3/2}{1 + \frac{2}{2^n}} = \frac{3\,\zeta(n)}{1 + \frac{1}{2^{n-1}}}.$$

Endlich ist für $k = 2$

$$Q(S) \geqq 2\,\zeta(n)\,\frac{5/3}{1 + \frac{2}{2^n} + \frac{7}{3^n}}.$$

Zu jedem n gibt es ein $k(n)$ mit der günstigsten Schranke. $k(n)$ wird mit n monoton wachsen. Offenbar kann man eine Schranke angeben, welche mit wachsendem n nach $2\,a$ strebt. Bevor ich (2) beweise, müssen einige Begriffe und Bezeichnungen eingeführt werden.

§ 2

Das Innere eines Sternkörpers S werde mit $\dot{S}$ bezeichnet. Gitter schreibe ich Γ, Gitterpunkte $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{X}$. Der Ursprung wird mit $\mathfrak{O}$, die leere Menge mit 0 bezeichnet. Ein Gitterpunkt $\mathfrak{G} \in \Gamma$ heißt primitiv, falls auf der Strecke $\mathfrak{O}\mathfrak{G}$ kein weiterer Gitterpunkt von Γ liegt. Zu jedem $\mathfrak{G} \in \Gamma$ gibt es einen primitiven Gitterpunkt $\tilde{\mathfrak{G}} \in \Gamma$, so daß $\mathfrak{G} = t \cdot \tilde{\mathfrak{G}}$, wobei t eine natürliche Zahl. $t = t(\mathfrak{G})$ hängt eindeutig von $\mathfrak{G}$ ab. Unter Γ_i (i natürliche Zahl) verstehe ich die Menge jener $\mathfrak{G} \in \Gamma$, welche

[3] Im allgem. kann diese Abschätzung noch verbessert werden. Man kann z. B. $b_2 = 7$ durch $b_2 = 6$ ersetzen, muß dann allerdings die folgenden b_j teilweise vergrößern.

$t(\mathfrak{G}) = i$ erfüllen. Offenbar ist $\Gamma = \overset{\infty}{\underset{i=1}{U}} \Gamma_i$ und die Menge der primitiven Punkte von Γ stimmt mit Γ_1 überein.

Definition: Eine um $\mathfrak{O}$ symmetrische Menge $\mathfrak{S}$ von Gitterpunkten in einem Gitter Γ heiße sternförmige Gitterpunktmenge, „st. G.", falls mit $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$ auch alle jene Gitterpunkte in $\mathfrak{S}$ liegen, welche sich auf der Strecke $\mathfrak{O}\mathfrak{G}$ befinden. Das heißt, $\mathfrak{S}$ ist st. G., falls mit $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$ und $\mathfrak{G} = t(\mathfrak{G}) \,.\, \tilde{\mathfrak{G}}$ auch alle Punkte $\pm\tilde{\mathfrak{G}}$, $\pm 2\,\tilde{\mathfrak{G}}$, ..., $\pm t(\mathfrak{G}) \,.\, \tilde{\mathfrak{G}}$ in $\mathfrak{S}$ liegen. Den Ursprung rechnet man nicht zu $\mathfrak{S}$. Es soll eingeführt werden $\mathfrak{S}_i = \mathfrak{S} \cap \Gamma_i$. Offenbar ist $\mathfrak{S}_1$ wieder st. G., nicht aber $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ usf.

Falls eine Menge $\mathfrak{N}$ mit endlich vielen Elementen vorliegt, soll $z(\mathfrak{N})$ die Zahl ihrer Elemente angeben. Hat $\mathfrak{S}$ endlich viele Elemente, so ist $z(\mathfrak{S}) = \overset{\infty}{\underset{i=1}{\Sigma}} z(\mathfrak{S}_i)$. Wir zählen bei symmetrischen Gitterpunktmengen jedoch nicht die Zahl der Punkte, sondern die Zahl der Punktpaare. Besteht $\mathfrak{S}$ etwa aus k Punktepaaren und $2\,k$ Punkten, so ist $z(\mathfrak{S}) = k$.

Ein Gitter $\bar{\Gamma}$ heiße Teilgitter von Γ, $\bar{\Gamma} \subset \Gamma$, falls aus $\mathfrak{G} \in \bar{\Gamma}$ folgt $\mathfrak{G} \in \Gamma$. Stets ist $d(\bar{\Gamma})$ ein ganzzahliges Vielfaches von $d(\Gamma)$.

Nun soll Γ das natürliche Gitter in cartesischen Koordinaten sein, $d(\Gamma) = 1$. Ein Gitterpunkt $\mathfrak{G} \in \Gamma$ hat Koordinaten $\mathfrak{G}(g_1, g_2, \ldots, g_n)$, wobei die g_i ganze Zahlen sind. Ferner sei m eine natürliche Zahl.

Definition: Unter ${}_m\Gamma(\mathfrak{G})$ versteht man die Menge jener Gitterpunkte $\mathfrak{X}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathfrak{X} \in \Gamma$, welche die Kongruenz

$$g_1 x_1 + g_2 x_2 + \ldots + g_n x_n \equiv 0 \pmod{m} \tag{3}$$

erfüllen. ${}_m\Gamma(\mathfrak{G})$ bildet einen diskreten Modul von Gitterpunkten, also wieder ein Gitter. Aus $\mathfrak{H} \in {}_m\Gamma(\mathfrak{G})$ folgt $\mathfrak{G} \in {}_m\Gamma(\mathfrak{H})$.

Seien nun $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ Mengen von endlichvielen Gitterpunkten. Dann hat man

$$\sum_{\mathfrak{G} \in \mathfrak{W}} z({}_m\Gamma(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{V}) = \sum_{\mathfrak{H} \in \mathfrak{V}} z({}_m\Gamma(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{W}). \tag{4}$$

Unter ${}_m\mathfrak{N}$ soll die Menge der Gitterpunkte $\mathfrak{X}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ verstanden werden, welche $0 \leqq x_i < m$ erfüllen, weiter ${}_m\mathfrak{M} = {}_m\mathfrak{N} - \mathfrak{O}$; ${}_m\mathfrak{N}(\mathfrak{G}) = {}_m\mathfrak{N} \cap {}_m\Gamma(\mathfrak{G})$; ${}_m\mathfrak{M}(\mathfrak{G}) = {}_m\mathfrak{M} \cap {}_m\Gamma(\mathfrak{G})$. Es ist $z({}_m\mathfrak{N}) = m^n$, $z({}_m\mathfrak{M}) = m^n - 1$.

§ 3

Hilfssatz 1. Sei Γ das natürliche Gitter, $\mathfrak{G} \in \Gamma$ mit g.g.T. $(g_1, g_2, \ldots, g_i, \ldots, g_n, m) = 1$. Dann gilt

$$d({}_m\Gamma(\mathfrak{G})) = m. \tag{5}$$

Ist somit $\mathfrak{G} \in \Gamma_i$ und g.g.T. $(i, m) = 1$, so $d({}_m\Gamma(\mathfrak{G}) = m$.

Beweis: Offenbar genügt es, ${}_m\Gamma(\mathfrak{G})$ in ${}_m\mathfrak{N}$ zu untersuchen und zu zeigen, daß gilt

$$z({}_m\mathfrak{N}(\mathfrak{G})) = \frac{z({}_m\mathfrak{N})}{m} = m^{n-1}. \tag{6}$$

Wir zeigen gleich mehr, nämlich, daß jede Kongruenz $g_1 x_1 + g_2 x_2 + \ldots + g_n x_n \equiv a \pmod m$ mit g.g.T. $(g_1, g_2, g_3, \ldots, g_n, m) = k$, k/a (k teilt a) in ${}_m\mathfrak{N}$ genau $k.m^{n-1}$ Lösungen besitzt, während für $k \nmid a$ keine Lösung vorhanden ist. Für $n = 1$ ist die Behauptung richtig, wie man aus der elementaren Zahlentheorie weiß. Sei der Satz für $n - 1$ bewiesen, ich zeige ihn für n Dimensionen. Sei zunächst x_n fest und wir betrachten die Kongruenz $g_1 x_1 + g_2 x_2 + \ldots + g_{n-1} x_{n-1} \equiv a - g_n x_n \pmod m$ nach ihren Lösungen in $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$. Sei g.g.T. $(g_1, g_2, \ldots \ldots, g_{n-1}, m) = l$. Es gibt somit nach Induktionsannahme genau $l \cdot m^{n-2}$ Lösungen für $0 \leqq g_j < m$ $(j = 1, 2, \ldots, n - 1)$, falls $l/a - g_n x_n$, $g_n x_n \equiv a \pmod l$, sonst keine Lösung. Es ist g.g.T. $(g_n, l) = k$, also überhaupt keine Lösung möglich, wenn $k \nmid a$. Falls k/a ist für x_n genau eine Lösung mod l/k vorhanden, somit km/l Lösungen mod m. Die Gesamtzahl der Lösungen in ${}_m\mathfrak{N}$ ist in diesem Fall $\frac{km}{l} . l . m^{n-2} = k m^{n-1}$, wie behauptet.

Für $\mathfrak{G} \in \Gamma_i$, g.g.T. $(i, m) = 1$, wird sein

$$z({}_m\mathfrak{N}(\mathfrak{G})) = m^{n-1} - 1. \tag{7}$$

§ 4

Sei k natürlich, fest. Wie in § 1 seien die ersten k Primzahlen $p_0 = 1, p_1 = 2, p_2, p_3, \ldots, p_k$ durchnumeriert. Es liege eine weitere Primzahl q, $q > p_k$ vor, die ich auch mit $q = \bar{p}_{k+1}$ bezeichnen werde. $\bar{p}_{k+1}$ muß nicht die auf p_k folgende Primzahl sein. Endlich erkläre ich Zahlen c_j $(j = 0, 1, 2, \ldots, k, k + 1)$ durch

$$c_0 = 1, \quad c_j = c_{j-1} \cdot p_j + 1 \; (j = 1, 2, \ldots, k), \text{ aber } \quad c_{k+1} = (c_k \cdot \bar{p}_{k+1} + 1.$$

Z. B. $c_1 = 3$, $c_2 = 10$.

Hilfssatz 2. Sei $\mathfrak{S}$ st. G. in Γ, weiter k, c_k wie eben erklärt. Es soll die Voraussetzung gelten

$$\sum_{j=0}^{k} b_j z(\mathfrak{S}_{p_j}) < c_{k+1}, \quad \mathfrak{S}_q = 0. \tag{8}$$

Dann wird behauptet: Es gibt ein Gitter $\overline{\Gamma} \subset \Gamma$ mit

$$d(\overline{\Gamma}) = \prod_{j=1}^{k} p_j \cdot \bar{p}_{k+1}\, d(\Gamma) \text{ und } \overline{\Gamma} \cap \mathfrak{S} = 0.$$

Beweis: Man zeigt zuerst $\sum_{j=0}^{l} b_j = c_l$. $(l = 0, 1, 2 \ldots, k)$. Es ist $b_0 = c_0$ weiteren Beweis durch vollständige Induktion. Sei bereits bewiesen für $l - 1$, wir zeigen diese Tatsache für l:

$$\sum_{j=0}^{l} b_j = \sum_{j=0}^{l-1} b_j + b_l = \sum_{j=0}^{l-1} b_j\,(1 + p_l - 1) + 1 = c_{l-1}\, p_l + 1 = c_l.$$

Im folgenden darf man O.B.d.A. Γ als natürliches Gitter voraussetzen. Weiter wird es nützlich sein, gewisse Mengen $\tilde{\mathfrak{S}}_{p_i}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, k)$ zu konstruieren: Sei $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}_1$. Es gibt ein natürliches t, so daß $\mathfrak{G}, 2\,\mathfrak{G}, \ldots$ $\ldots, t\,\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$, jedoch $(t+1)\,\mathfrak{G} \notin \mathfrak{S}$. Ich nehme die größte Primzahl unter 1, 2, 3, $\ldots, t$ her, welche noch $p \leqslant p_k$ erfüllt. Diese größte Primzahl ist selbstverständlich unter $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_k$ zu finden, sie sei etwa p_i. Hierauf wird der Gitterpunkt $\mathfrak{G} \cdot p_0 \cdot p_1 \cdot p_2 \ldots p_i$ gebildet. Jedem $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}_1$ entspricht ein auf diese Weise zu bildender Gitterpunkt. Unter $\tilde{\mathfrak{S}}_{p_i}$ verstehe ich die Menge aller Gitterpunkte, welche auf diese Art entstehen. (Beispiel: Sei $\mathfrak{G} = (2, 3)$ im R_2, $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$. Offenbar ist $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}_1$. Es soll aber auch $(4, 6)$, $(6, 9)$, $(8, 12) \in \mathfrak{S}$ liegen, aber $(10, 15) \notin \mathfrak{S}$. Unser t ist daher $t = 4$. Unter 1, 2, 3, 4 ist offenbar 3 die größte Primzahl. Falls $k \geqslant 3$ gegeben ist, nimmt man $p = p_2 = 3, i = 2$ (bei $k = 2 : p = 2$). Es wird nun der Gitterpunkt $\mathfrak{G} \cdot p_0 \cdot p_1 \cdot p_2 =$ $= (2, 3) \cdot 6 = (12, 18)$ gebildet. Dieser liegt in $\tilde{\mathfrak{S}}_{p_2} = \tilde{\mathfrak{S}}_3$). Es wird im allgemeinen $\tilde{\mathfrak{S}}_{p_i}$ nicht mehr in $\mathfrak{S}$ liegen. Man hat

$$z(\tilde{\mathfrak{S}}_{p_k}) = z(\mathfrak{S}_{p_k}), z(\tilde{\mathfrak{S}}_{p_j}) = z(\mathfrak{S}_{p_j}) - z(\mathfrak{S}_{p_{j+1}})\,(j = 0, 1, 2, \ldots, k-1). \tag{9}$$

$$z(\mathfrak{S}_{p_j}) = z(\tilde{\mathfrak{S}}_{p_j}) + z(\mathfrak{S}_{p_{j+1}}) = \sum_{l=j}^{k} z(\tilde{\mathfrak{S}}_{p_l}) \text{ und weiter nach (8)}$$

$$\sum_{j=0}^{k} b_j z(\mathfrak{S}_{p_j}) = \sum_{j=0}^{k} b_j \Big(\sum_{l=j}^{k} z(\tilde{\mathfrak{S}}_{p_l})\Big) = \sum_{l=0}^{k} \Big(z(\tilde{\mathfrak{S}}_{p_l}) \sum_{j=0}^{l} b_j\Big) = \sum_{l=0}^{k} c_l z(\tilde{\mathfrak{S}}_{p_l}) < c_{k+1}. \tag{10}$$

Es ist aus formalen Gründen zweckmäßig, statt $\tilde{\mathfrak{S}}_{p_l} \to \tilde{\mathfrak{S}}_{p_l}^{k+1}$, $\mathfrak{S}_q \to \tilde{\mathfrak{S}}_q^{k+1}$ zu schreiben, so daß entsteht

$$\sum_{l=0}^{k} c_l\, z(\tilde{\mathfrak{S}}_{p_l}^{k+1}) < c_{k+1},\ \tilde{\mathfrak{S}}_{p_{k+1}}^{k+1} = \tilde{\mathfrak{S}}_{q}^{k+1} = 0. \qquad (10,\ k+1)$$

Es soll $\mathfrak{H} \in {}_q\mathfrak{M}$ sein, ich bilde ${}_q\Gamma(\mathfrak{H})$. Neu eingeführt wird $\tilde{\mathfrak{S}}_{p_j}^{k}(\mathfrak{H}) = \tilde{\mathfrak{S}}_{p_j}^{k+1} \cap {}_q\Gamma(\mathfrak{H})$. Nun bilde ich die Größe $T(\mathfrak{H}) = \sum_{j=0}^{k} c_j\, z(\tilde{\mathfrak{S}}_{p_j}^{k}(\mathfrak{H}))$ und schätze ab:

$$\sum_{\mathfrak{H} \in {}_q\mathfrak{M}} T(\mathfrak{H}) = \sum_{\mathfrak{H} \in {}_q\mathfrak{M}} \left(\sum_{j=0}^{k} c_j\, z(\tilde{\mathfrak{S}}_{p_j}^{k}(\mathfrak{H}))\right) = \sum_{j=0}^{k} c_j \left(\sum_{\mathfrak{H} \in {}_q\mathfrak{M}} z(\tilde{\mathfrak{S}}_{p_j}^{k}(\mathfrak{H}))\right) = \sum_{j=0}^{k} c_j \left(\sum_{\mathfrak{G} \in \tilde{\mathfrak{S}}_{p_j}^{k+1}} z({}_q\mathfrak{M}(\mathfrak{G}))\right)$$

nach (4). Daraus weiter

$$\sum_{\mathfrak{H} \in {}_q\mathfrak{M}} T(\mathfrak{H}) = \sum_{j=0}^{k} c_j\, z(\tilde{\mathfrak{S}}_{p_j}^{k+1})\,(q^{n-1}-1) < c_{k+1}(q^{n-1}-1) \leqq c_k\, q(q^{n-1}-1) <$$

$$< c_k\, z({}_q\mathfrak{M}). \qquad (11)$$

Denn es ist ja wegen (7) $z({}_q\mathfrak{M}(\mathfrak{G})) = q^{n-1} - 1$, falls $\mathfrak{G} \in \tilde{\mathfrak{S}}_{p_j}^{k+1}$ für $j = 0, 1, 2, \ldots, k$. Daraus ist ersichtlich: Es gibt in ${}_q\mathfrak{M}$ ein $\mathfrak{H}$ mit $T(\mathfrak{H}) < c_k$. Dieses $\mathfrak{H}$ soll mit $\mathfrak{H}^{k+1}$ bezeichnet werden. Es ist $\mathfrak{H}^{k+1} \in {}_q\mathfrak{M}$. Die Mengen $\tilde{\mathfrak{S}}_{p_j}^{k}(\mathfrak{H}^{k+1})$ werden nun kurz $\tilde{\mathfrak{S}}_{p_j}^{k}$ geschrieben. Man hat wegen $T(\mathfrak{H}^{k+1}) < c_k$

$$\sum_{j=0}^{k} c_j\, z(\tilde{\mathfrak{S}}_{p_j}^{k}) < c_k. \qquad (10,\ \mathrm{k})$$

Das kann man auch schreiben

$$\sum_{l=0}^{k-1} c_l\, z(\tilde{\mathfrak{S}}_{p_l}^{k}) < c_k,\ \tilde{\mathfrak{S}}_{p_k}^{k} = 0. \qquad (10,\ \mathrm{k})$$

Die Gleichung (10, k) ist genau so geartet wie $(10, k+1)$, wenn man $k \to k-1$ übergeführt denkt. Statt der Mengen $\tilde{\mathfrak{S}}_{p_l}^{k+1}$ sind nunmehr die Mengen $\tilde{\mathfrak{S}}_{p_l}^{k}$, statt der Zahlen $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_k, p_{k+1}$ die Zahlen $p_0, p_1, \ldots, p_{k-1}, p_k$.

Auf dieselbe Weise gelangt man von (10, k) zu einer Gleichung $(10, k-1)$ usf. und bildet successive Mengen $\tilde{\mathfrak{S}}_{p_l}^{i}$ mit

$$\sum_{l=0}^{i-1} c_l\, z(\tilde{\mathfrak{S}}_{p_l}^{i}) < c_i,\ \tilde{\mathfrak{S}}_{p_i}^{i} = 0 \ (i = k+1, k, k-1, \ldots, 1, 0) \qquad (10,\ \mathrm{i})$$

Dabei ist

$$0 = \tilde{\mathfrak{S}}_{p_l}^{l} \subseteq \tilde{\mathfrak{S}}_{p_l}^{l+1} \subseteq \ldots \subseteq \tilde{\mathfrak{S}}_{p_l}^{k} \subseteq \tilde{\mathfrak{S}}_{p_l}^{k+1}\ (l = k, k-1, \ldots, 1, 0). \qquad (12)$$

und wir erzeugen eine Reihe von Gitterpunkten $\mathfrak{H}^i$ $(i = k+1, k, \ldots, 1)$,

welche $\mathfrak{H}^i \in {}_{p_i}\mathfrak{M}$ $(i = k, k-1, \ldots, 1)$ bzw. $\mathfrak{H}^{k+1} \in {}_{q}\mathfrak{M}$ erfüllen. Es ist

$$\tilde{\mathfrak{S}}^l_{p_j} = \tilde{\mathfrak{S}}^l_{p_j}(\mathfrak{H}^{l+1}) = \tilde{\mathfrak{S}}^{l+1}_{p_j} \cap \underset{p_{l+1}}{\Gamma}(\mathfrak{H}^{l+1}) \,.\, (l = k, k-1, \ldots, j) \qquad (12a)$$

Bei $i = 1$ ergibt sich

$$c_0\, z(\tilde{\mathfrak{S}}^1_{p_0}) = z(\tilde{\mathfrak{S}}^1_1) < c_1 = 3,\ \tilde{\mathfrak{S}}^1_{p_1} = \tilde{\mathfrak{S}}^1_2 = 0. \qquad (10{,}1)$$

Bei $i = 0$ endlich verbleibt noch

$$c_0\, z(\tilde{\mathfrak{S}}^0_{p_0}) < 1 \text{ und } (10{,}0) \text{ reduziert sich auf } \tilde{\mathfrak{S}}^0_1 = 0. \qquad (10{,}0)$$

§ 5

Nun betrachten wir die Gitterpunkte $\mathfrak{H}^{k+1}, \mathfrak{H}^k, \ldots, \mathfrak{H}^2, \mathfrak{H}^1$. Aus $\mathfrak{H}^i \in {}_{p_i}\mathfrak{M}$ folgt, wenn die Koordinaten $\mathfrak{H}^i(h^i_1, h^i_2, \ldots, h^i_n)$ geschrieben werden,

g.g.T. $(h^i_1, h^i_2, \ldots, h^i_n, p_i) = 1$ $(i = k, k-1, \ldots, 1)$; g.g.T.

$$(h^{k+1}_1, \ldots, h^{k+1}_n, \bar{p}_{k+1}) = 1.$$

Bildet man die Kongruenzen

$$\left.\begin{array}{ll} x_l \equiv h^{k+1}_l & (\mathrm{mod}\ \bar{p}_{k+1}) \\ x_l \equiv h^k_l & (\mathrm{mod}\ p_k) \\ \vdots & \vdots \\ x_l \equiv h^2_l & (\mathrm{mod}\ p_2{=}3) \\ x_l \equiv h^1_l & (\mathrm{mod}\ p_1{=}2) \end{array}\right\} l = 1, 2, \ldots, n, \qquad (13)$$

so gibt es für $\mathfrak{X}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in ${}_{z}\mathfrak{M}$ genau eine Lösung, wenn

$z = \overset{k}{\underset{i=1}{\Pi}} p_i \cdot \bar{p}_{k+1}$. G. g. T. $(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 1$, weil g. g. T. $(x_1, x_2, \ldots,$ $\ldots, x_n, p_i) =$ g. g. T. $(h^i_1, h^i_2, \ldots, h^i_n, p_i) = 1$ nach (13) und weil $\mathfrak{H}^i \in {}_{p_i}\mathfrak{M}$.

Zu diesem $\mathfrak{X}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bilde ich nun das Gitter $\overline{\Gamma} = {}_{z}\Gamma(\mathfrak{X})$. Man sieht in trivialer Weise, daß $\overline{\Gamma} \subset \Gamma$ und nach Hilfssatz 1 besteht die Gleichung $d(\overline{\Gamma}) = z d(\Gamma)$. Es wird sich herausstellen, daß $\overline{\Gamma}$ auch die dritte geforderte Eigenschaft besitzt, nämlich $\overline{\Gamma} \cap \mathfrak{S} = 0$.

Der Beweis dafür erfolgt indirekt: Wir nehmen an, es gäbe ein $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{G} \in \overline{\Gamma}$, $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$. Man darf annehmen, $\mathfrak{G}$ ist primitiv in $\overline{\Gamma}$. Daraus folgt, daß $\mathfrak{G} \in \Gamma_t$, wobei t ein Teiler von z, t/z. Somit ist auch $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}_t$.

Da $\mathfrak{S}\bar{p}_{k+1} = 0$, muß t ein Teiler von $\overset{k}{\underset{l=1}{\Pi}} p_l$ sein. Am Halbstrahl von $\mathfrak{G}$ liegt ein primitiver Gitterpunkt $\overline{\mathfrak{G}} \in \mathfrak{S}_1$ und diesem ist ein Gitterpunkt $\tilde{\mathfrak{G}} = \overline{\mathfrak{G}} \,.\, p_0 \,.\, p_1 \,.\, \ldots \,.\, p_i \,.$ zugeordnet, $\tilde{\mathfrak{G}} \in \tilde{\mathfrak{S}}_{p_i}$. Nun muß t ein Teiler von $p_0 \,.\, p_1 \,.\, p_2 \,.\, \ldots \,.\, p_i$ sein und es folgt aus $\mathfrak{G} \in {}_{z}\Gamma(\mathfrak{X})$ sofort

$\tilde{\mathfrak{G}} \in {}_z\Gamma(\mathfrak{X})$. Nun erinnern wir uns daran, daß wir $\tilde{\mathfrak{S}}_{p_i}$ auch mit $\tilde{\mathfrak{S}}_{p_i}^{k+1}$ bezeichnet haben und daß $\tilde{\mathfrak{G}} \in \tilde{\mathfrak{S}}_{p_i}^{k+1}$.

Weiter ist nach (12) $0 = \tilde{\mathfrak{S}}_{p_i}^{i} \subseteq \tilde{\mathfrak{S}}_{p_i}^{i+1} \subseteq \cdots \subseteq \tilde{\mathfrak{S}}_{p_i}^{k} \subseteq \tilde{\mathfrak{S}}_{p_i}^{k+1}$. Sei t die größte natürliche Zahl, so daß $\tilde{\mathfrak{G}} \in \tilde{\mathfrak{S}}_{p_i}^{t}$. Wegen $\tilde{\mathfrak{S}}_{p_i}^{i} = 0$ muß $t > i$ sein. Es ist also $\tilde{\mathfrak{G}} \in \tilde{\mathfrak{S}}_{p_i}^{t}$, $\tilde{\mathfrak{G}} \notin \tilde{\mathfrak{S}}_{p_i}^{t-1}$.

Aus $\tilde{\mathfrak{G}} \in {}_z\Gamma(\mathfrak{X})$ folgt $\tilde{\mathfrak{G}} \in {}_{p_t}\Gamma(\mathfrak{X})$, $\tilde{\mathfrak{G}} \in {}_{p_t}\Gamma(\mathfrak{H}')$ nach (13). Es folgt endlich $\tilde{\mathfrak{G}} \in \tilde{\mathfrak{S}}_{p_i}^{t} \cap {}_{p_t}\Gamma(\mathfrak{H}') = \tilde{\mathfrak{S}}_{p_i}^{t-1}$ nach (12a), was auf einen Widerspruch führt.

Es ist folglich $\overline{\Gamma} \cap \mathfrak{S} = 0$ und Hilfssatz 2 bewiesen.

§ 6

Es seien die k ersten Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_k$ gegeben, sowie eine weitere Primzahl $q = \bar{p}_{k+1}$. Die Zahlen a_l, b_l sollen erklärt sein wie in § 1, die Größen c_l ($l = 0, 1, 2, \ldots, k, k+1$) nach § 4.

Hilfssatz 3. Sei S ein Sternkörper im R_n mit der kritischen Determinante $\Delta(S)$. Weiter bedeute Γ ein Gitter. Wir erklären $\mathfrak{S}$ durch $\mathfrak{S} = \Gamma \cap \dot{S}$. Offenbar ist $\mathfrak{S}$ eine st. G. in Γ. Es sei nun die Voraussetzung, daß

$$z\, d(\Gamma) < \Delta(S) \qquad (z = \prod_{i=1}^{k} p_i \cdot \bar{p}_{k+1}). \tag{14}$$

Es wird behauptet, daß entweder

$$\mathfrak{S}\bar{p}_{k+1} \neq 0 \text{ oder } \sum_{j=0}^{k} b_j\, z(\mathfrak{S}_{p_j}) \geqq c_{k+1}. \tag{15}$$

Beweis indirekt: Angenommen, es wäre $\sum_{j=0}^{k} b_j\, z(\mathfrak{S}_{p_j}) < c_{k+1}$, $\mathfrak{S}\bar{p}_{k+1} = 0$.

Nach Hilfssatz 2 existiert dann ein Teilgitter $\overline{\Gamma} \subset \Gamma$ mit $d(\overline{\Gamma}) = z\, d(\Gamma)$ und $\overline{\Gamma} \cap \mathfrak{S} = 0$.

Also ist $\overline{\Gamma} \cap \dot{S} = \overline{\Gamma} \cap \Gamma \cap \dot{S} = \overline{\Gamma} \cap \mathfrak{S} = 0$ und $\overline{\Gamma}$ ist zulässig für S, $d(\overline{\Gamma}) = z d(\Gamma) < \Delta(S)$, was einen Widerspruch bedeutet.

§ 7

Jetzt kann (2) bewiesen werden. Sei wieder k fest. Sei $\varepsilon > 0$. Unter $\Gamma(\varepsilon)$ verstehe in jenes Gitter im R_n, dessen Punkte Koordinaten besitzen, welche ganzzahlige Vielfache von ε sind (cartesische Koordinaten).

S soll ein Sternkörper sein. $\mathfrak{S}(\varepsilon) = \Gamma(\varepsilon) \cap \dot{S}$ ist eine st. G. in $\Gamma(\varepsilon)$. Es wird $\mathfrak{S}_j(\varepsilon)$ wie in § 2 erklärt. Wir bezeichnen $z(\mathfrak{S}_j(\varepsilon))$ kurz mit $z_j(\varepsilon)$. Nach einer Arbeit von *C. A. Rogers*[4] ist nun

[4] *C. A. Rogers*, Annals of Math., 48 (1947), 994—1002 (998).

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \varepsilon^n z_1(\varepsilon) = \frac{V(S)}{2\,\zeta(n)}. \tag{16}$$

Da $z_l(\varepsilon) = z_1(l\varepsilon)$ hat man weiter $\varepsilon^n z_l(\varepsilon) = (l\,\varepsilon)^n z(l\varepsilon) \cdot \frac{1}{l^n}$ und

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \varepsilon^n z_l(\varepsilon) = \frac{V(S)}{2\,\zeta(n)} \cdot \frac{1}{l^n}. \tag{16a}$$

Unter $q(\varepsilon)$ verstehe ich die größte Primzahl, welche

$$q(\varepsilon) \cdot \prod_{i=1}^{k} p_i \cdot \varepsilon^n < \Delta(S) \text{ also } q(\varepsilon) \cdot \prod_{i=1}^{k} p_i\, d(\Gamma(\varepsilon)) < \Delta(S)$$

erfüllt.

Nach dem Primzahlsatz hat man

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \prod_{i=1}^{k} p_i \cdot q(\varepsilon) \cdot \varepsilon^n = \prod_{i=1}^{k} p_i \lim q(\varepsilon) \cdot \varepsilon^n = \Delta(S). \tag{17}$$

Nach Voraussetzung ist S beschränkt und es gibt somit ein R, so daß $|\,x_i\,| < R$ $(l = 1, 2, 3, \ldots, n)$ für alle $X(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S$. Man kann nun ε_0 so klein wählen, daß für alle ε mit $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ gilt $q(\varepsilon) \cdot \varepsilon > R$. Für solche ε ist offenbar $\mathfrak{S}_{q(\varepsilon)}(\varepsilon) = 0$.

Es ist $\prod_{i=1}^{k} p_i \cdot q(\varepsilon)\, d(\Gamma(\varepsilon)) < \Delta(S)$. Weil aber $\mathfrak{S}_{q(\varepsilon)}(\varepsilon) = 0$ muß nach Hilfssatz 3 gelten:

$$\sum_{j=0}^{k} b_j\, z(\mathfrak{S}_{p_j}(\varepsilon)) \geqslant c_{k+1}, \text{ wobei } c_{k+1} = c_k \cdot q(\varepsilon) + 1, \tag{18}$$

also

$$\sum_{j=0}^{k} b_j\, z(\mathfrak{S}_{p_j}(\varepsilon)) \geqslant c_k \cdot q(\varepsilon).$$

Daher

$$c_k \cdot q(\varepsilon) \cdot \varepsilon^n < \sum_{j=0}^{k} b_j\, z(\mathfrak{S}_{p_j}(\varepsilon)) \cdot \varepsilon^n.$$

Nach (16a), (17) existiert der Limes auf beiden Seiten der letzten Ungleichung, so daß man erhält

$$\Delta(S) \cdot \frac{c_k}{\prod_{i=1}^{k} p_i} \leqslant \sum_{j=0}^{k} b_j \cdot \frac{V(S)}{2\,\zeta(n)} \cdot \frac{1}{(p_j)^n} = \frac{V(S)}{2\,\zeta(n)} \cdot \sum_{j=0}^{k} \frac{b_j}{(p_j)^n} \cdot$$

Nun ist aber $a_k = \dfrac{c_k}{\prod_{i=1}^{k} p_i}$ (denn $a_0 = \dfrac{c_0}{p_0}$ und es sei bereits gezeigt

$$a_{k-1} = \frac{c_{k-1}}{\prod_{i=1}^{k-1} p_i}).$$

Daraus

$$\frac{c_k}{\prod_{i=1}^{k} p_i} = \frac{c_{k-1} \cdot p_k + 1}{\prod_{i=1}^{k-1} p_i \cdot p_k} = a_{k-1} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p_k} = a_k.$$

Deshalb schließt man weiter

$$Q(S) = \frac{V(S)}{\triangle(S)} \geqslant 2\,\zeta(n) \cdot \frac{a_k}{\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{(p_j)^n}} \qquad \text{w.z.b.w.} \qquad (2)$$

Über eine Klasseneinteilung der Sternkörper

Von

Johann Hejtmanek, Wien

(Eingelangt am 27. Juni 1955)

§ 1

Im R_2 sei ein kartesisches Koordinatensystem gegeben.

Definition: Eine Punktmenge, die 1. symmetrisch bezüglich 0, 2. beschränkt ist, 3. 0 als inneren Punkt hat, 4. abgeschlossen ist und 5. die Eigenschaft hat, daß jede Halbgerade von 0 den Rand in einem Punkt schneidet, heißt Sternkörper K.

$\{\Gamma\}$ sei die Menge der K-zulässigen Gitter. Das $\inf_{\{\Gamma\}} d(\Gamma\} = \Delta(K)$ heißt Determinante des Sternkörpers. Wie *Mahler* gezeigt hat, gibt es wenigstens ein kritisches Gitter, d. h. ein zulässiges Gitter Γ mit $d(\Gamma) = \Delta(K)$.

$\{\Lambda\}$ sei die Menge der kritischen Gitter eines Sternkörpers; sie ist nicht leer. Jedes Λ hat eine bestimmte Anzahl $k > 2$ Gitterpunkte am Rand.

Definition: $\max_{\{\Gamma\}} k = n$ heiße die Klassenzahl des Sternkörpers. Auf diese Weise ist eine Klasseneinteilung aller Sternkörper gegeben, indem man alle Sternkörper mit derselben Klassenzahl in eine Klasse gibt. Die Klasse bezeichne ich mit $\langle k \rangle$.

$\langle o \rangle$ und $\langle 1 \rangle$ sind natürlich leer.

$\langle 2 \rangle$ besteht aus allen Sternkörpern mit nur singulär kritischem Gitter. Diese Klasse ist nicht leer, *Mahler* hat einen solchen Sternkörper angegeben:

$$K = R_1 \cup R_2 \qquad \begin{aligned} R_1 &: -\vartheta \leq x \leq +\vartheta \qquad -\tfrac{1}{2} \leq y \leq +\tfrac{1}{2} \\ R_2 &: -\tfrac{1}{2} \leq x \leq +\tfrac{1}{2} \qquad -\vartheta \leq y \leq +\vartheta \\ & {}^3/_4 < \vartheta < 1. \end{aligned}$$

$\langle 3 \rangle$ ist nicht leer, sie enthält den Kreis.

Satz 1: *Zu jedem $k \geq 2$ gibt es einen Sternkörper, der genau ein k-kritisches Gitter hat und sonst kein kritisches Gitter mehr.*

Definition: Unter einem k-kritischen Gitter verstehe ich ein kritisches Gitter, das k Gitterpunktpaare am Rand des Sternkörpers hat. (Unter k-kritischem Gitter wird in der Literatur gewöhnlich etwas anderes verstanden: ein k-kritisches Gitter Λ ist ein k-zulässiges Gitter mit $d(\Lambda) = \Delta^k(K)$. k-zulässig heißt ein Gitter Λ mit weniger als k Gitterpunktpaaren im Inneren von K, $\inf_{\{\Lambda\}} d(\Lambda) = \Delta^k(K)$).

Beweis: Für $k = 2$ gibt es den von *Mahler* angegebenen Sternkörper. Vorausgesetzt wird, daß der Satz richtig ist für $k = n$, d. h. es gibt einen Sternkörper K, der genau ein n-kritisches Gitter hat und sonst kein kritisches Gitter. Man konstruiert einen Sternkörper $K' \supset K$, der genau ein $n + 1$ kritisches Gitter hat und sonst keines.

Man wählt einen primitiven Gitterpunkt, der nicht am Rand des Sternkörpers liegt, aus. Diesen bezeichnet man mit $\mathfrak{g}_{n+1}$. Auf K setzt man die Spitze S auf, daß $K \cup S = K'$ noch Sternkörper und S keinen Gitterpunkt außer $\mathfrak{g}_{n+1}$ enthält. Es wird gezeigt, daß Λ kritisches Gitter von K' ist. Angenommen, es gäbe ein K'-zulässiges Gitter Λ^* mit $d(\Lambda^*) < d(\Lambda)$. Weil $K' \supset K$ ist, wäre Λ^* auch K-zulässiges Gitter mit $d(\Lambda^*) < \Delta(K)$, was nicht sein kann. Nun wird noch gezeigt, daß nur Λ kritisches Gitter von K' ist. Angenommen, es gäbe ein anderes zu K' kritisches Gitter Λ^{**}, $d(\Lambda^{**}) = \Delta(K) = \Delta(K')$, $\Lambda^{**} \neq \Lambda$, Λ^* ist zu K kritisches Gitter. Dies kann nicht sein, weil K nur ein kritisches Gitter hat. Schließlich ist klar, daß Λ $n + 1$-kritisches Gitter bezüglich K' ist.

§ 2

Im § 1 beschränkten sich unsere Betrachtungen auf den R_2 und auf beschränkte Sternkörper. Unter K werde im folgenden ein (im allgemeinen unbeschränkter) Sternkörper im R_n verstanden. Es sei K von endlichen Typus ($\Delta(K) < +\infty$), d. h. es gibt mindestens ein K-zulässiges Gitter. Nach einem Satz von *Mahler* folgt, daß es zu K kritische Gitter gibt. $A_K = \{\Gamma\}$ (Γ kritisches Gitter von K), A_K ist die Menge der zu K kritischen Gitter. $\dim K \cap \Gamma\{\Gamma \in A_K\} = l$ sei Anzahl der Gitterpunktpaare von Γ am Rand von K. $\max l\{\Gamma \in A_K\} = k$ werde die Klassenzahl $\langle k \rangle$ des Sternkörpers K genannt. Wie *Mahler* gezeigt hat, ist für beschränkte K $k \geq n$ (n Dimensionszahl), ein n-kritisches Gitter (d. h. ein kritisches Gitter mit n Gitterpunktpaaren am Rand) heißt bekanntlich singulär kritisches Gitter.

In dieser Verallgemeinerung muß $l = -\infty$ und $k = +\infty$ zugelassen werden. Wie *Davenport* und *Rogers* gezeigt haben, gibt es einen Sternkörper mit einem kritischen Gitter mit unendlich vielen Gitterpunkten am Rand. Es werde an einige Begriffe erinnert: Ein Sternkörper heißt automorph, wenn jeder seiner Punkte durch einen geeignet gewählten Automorphismus in eine beschränkte Punktmenge transformiert werden kann. K heißt vollautomorph, wenn dazu jeder Punkt durch eine geeignete Transformation aus der Automorphismengruppe beliebig weit weg transformiert werden kann. K heißt beschränkt oder finit reduzibel (boundedly reducibel), wenn es einen beschränkten Teilsternkörper H mit $\Delta(H) = \Delta(K)$ gibt. Selbstverständlich ist $A_K \subset A_H$, wenn dazu $A_K = H_H$, heißt K voll reduzibel. Wenn K ein voll automorpher und voll reduzibler Sternkörper ist, dann hat jedes kritische Gitter unendlich viele Gitterpunkte am Rand. Diese Sternkörper gehören zu der Klasse $\langle\infty\rangle$.

Mahler konnte zeigen, daß jeder automorphe Sternkörper K wenigstens ein kritisches Gitter mit wenigstens einem Gitterpunktpaar am Rand von K hat. Diese Klasse der Sternkörper hat Klassenzahl $k \geq 1$. *Cassels* hat von einem automorphen Sternkörper ein kritisches Gitter mit keinem Gitterpunkt in FrK angegeben.

§ 3

Satz 2: *Es sei K voll automorpher und voll reduzibler Sternkörper in R_n. Dann gibt es im R_n ein $k_0(n) \geq n$, daß keine Klasse $\langle k\rangle$ $k \geq k_0(n)$ leer ist.*

Beweis: Weil K voll reduzibel ist, gibt es einen beschränkten Teilsternkörper $H \subset K$ mit $\Delta(H) = \Delta(K)$, die kritischen Gitter beider stimmen genau überein. $k_0(n)$ ist die Klassenzahl von H, sie ist endlich, weil H beschränkt ist. $A_{H\,\max}$ ist Menge aller H kritischen Gitter mit $k_0(n)$-Gitterpunktpaaren am Rand von H. $A_{H\,\max}$ ist nicht leer, es sei $\Gamma \in A_{H\,\max}$, $FrH \cap \Gamma = \{P_1, \ldots P_{k_0(n)}\}$ mit $P_i \neq 0$. Nach dem Satz von *Davenport* und *Rogers* hat aber jedes kritische Gitter unendlich viele Gitterpunkte am Rand von K. $P_{k_0(n)+1}$ ist Punkt 1. aus Γ und 2. aus FrK, selbstverständlich ist $P_{k_0(n)+1}$ nicht aus FrH. Mit $P_{k_0(n)+1}$ werde eine Spitze S konstruiert, darunter versteht man eine Punktmenge $\lambda P_{k_0(n)+1}$ mit $|\lambda| \leq 1$, die Punkte mit $|\lambda| < 1$ seien innere Punkte, S sei abgeschlossen und enthalte keinen Punkt irgend eines K kritischen Gitters außer $P_{k_0(n)+1}$ und sei in K enthalten. $H \cup S$ hat genau dieselben kritischen Gitter wie K, die Klassenzahl von $H \cup S$ ist $k_0(n) + 1$, denn es enthält sicher ein $k_0(n) + 1$ kritisches Gitter, aber

kein $k_0(n) + 2$ kritisches. Ein solches (es werde mit Γ^* bezeichnet) kann auf dem Rand von H nur $k_0(n)$ Gitterpunkte haben, auf der Spitze S höchstens einen nach Konstruktion, also zusammen höchstens $k_0(n) + 1$, was gegen die Annahme ist.

Durch Induktion kommt man zur Klasse $\langle k \rangle$ $k = k_0(n) + r$ $r = 1, 2, \ldots$, wobei wesentlich eingeht, daß jedes $\Gamma \in A_K$ unendlich viele Gitterpunkte am Rand hat.

Bemerkung: Durch Satz 2 werden aus jeder $\langle k \rangle$ $k = k_0(n) + r$ beschränkte Sternkörper angegeben. Jede Klasse $\langle k \rangle$ enthält aber auch nicht beschränkte Sternkörper, die auf folgende Weise konstruiert werden: K_0 sei nicht beschränkt, $K_0 \subset K$, $FrK \cap K_0 =$ leere Menge. $f(\mathfrak{x}) = \frac{|\mathfrak{x}|}{\mathfrak{r}}$ sei Distanzfunktion von K, $f_0(\mathfrak{x}) = \frac{|\mathfrak{x}|}{|\mathfrak{r}_0|}$ Distanzfunktion von K_0, es sei $|\mathfrak{r}_0| + \delta = |\mathfrak{r}|$. $f_0(\mathfrak{x}) = \frac{|\mathfrak{x}|}{|\mathfrak{r}| - \delta} = \frac{|\mathfrak{x}|}{|\mathfrak{r}|} \frac{|\mathfrak{r}|}{|\mathfrak{r}| - \delta} = f(\mathfrak{x}) \frac{|\mathfrak{r}|}{|\mathfrak{r}| - \delta}$. K_0 ist ein solcher Sternkörper. K_0 hat nun die Eigenschaft, daß $K_0 \cap A_K$ leer ist. Das H aus obigem Beweis kann ohne Schwierigkeit durch $H \cup K_0$ ersetzt werden.

Anwendungen von Satz 2: Im R_2 ist $|x_1 x_2| \leq 1$ voll automorpher und voll reduzibler Sternkörper. Aber bereits aus § 1 weiß man, daß ein $k_0(2) = 2$ angegeben werden kann. Auch $1 \leq x_1 x_2 \leq k$ ist Sternkörper mit dieser Eigenschaft.

Im R_3 kennt man folgende Sternkörper: $|x_1 x_2 x_3| \leq 1$, $|x_1(x_2^2 + x_3^2)| \leq 1$ und $|x_1^2 + x_2^2 - x_3^2| \leq 1$. Der Beweis von *Davenport* und *C. A. Rogers*, daß diese Sternkörper voll reduzibel sind, ist eine Verallgemeinerung des Satzes, daß sie beschränkt reduzibler sind. Der Beweis sei kurz angedeutet: Ein kritisches Gitter Λ heißt voll kritisch (fully critical), wenn es einen beschränkten Teilsternkörper H gibt, so daß für jedes H zulässige und genügend nahe an Λ gelegene Gitter Λ' gilt: entweder $d(\Lambda') > d(\Lambda)$ oder, wenn $d(\Lambda') = d(\Lambda)$, dann ist Λ' kritisch. Nun wird ein Hilfssatz bewiesen: Wenn jedes kritische Gitter von K vollkritisch ist, dann ist K voll reduzibel. Weil aber, wie dort gezeigt wird, jedes kritische Gitter der oben genannten Sternkörper voll kritisch ist, so ist jeder von ihnen voll reduzibel. Über den beschränkten Teilsternkörper von Satz 1 wird keine Aussage gemacht. Um $k_0(3)$ anzugeben, müßte er bekannt sein.

Im R_4 sind als voll reduzibel die Sternkörper $|x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2| \leq 1$ und $|x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2| \leq 1$ bekannt.

§ 4

K_0 sei vollautomorpher und voll reduzibler Sternkörper. Nach einem Satz von *Davenport* und *C. A. Rogers* gibt es zu jedem Gitter Λ mit $d(\Lambda) \leq \Delta(K_0)$ unendlich viele Gitterpunkte im Inneren von K_0, außer Λ ist kritisch, dann liegen unendlich viele Gitterpunkte am Rand von K_0.

Es gibt nun einen Sternkörper K mit folgenden Eigenschaften: 1. $K \subset K_0$, 2. $FrK_0 \cap K =$ leere Menge und 3. $\Delta(K) = \Delta(K_0)$. K wird auf folgende Weise konstruiert: Indikatrix von K_0 ist $f_0(\mathfrak{x})$. $K_\delta = (1-\delta)K_0$ mit $0 < \delta < 1$ mit Distanzfunktion $f_\delta(\mathfrak{x}) = \frac{1}{1-\delta} f_0(\mathfrak{x})$.

K_δ ist ebenfalls voll automorph und voll reduzibel, $\Delta(K_\delta) = (1-\delta)^n \Delta(K_0)$. K wird angegeben durch seine Distanzfunktion

$$f(\mathfrak{x}) = \frac{|\mathfrak{x}|}{|\mathfrak{r}|}, \; i\,|\mathfrak{r}| = |\mathfrak{r}_0|\,(1-h(|\mathfrak{r}_0|)), \; f(\mathfrak{x}) = \frac{|\mathfrak{x}|}{|\mathfrak{r}_0|}\frac{1}{1-h(|\mathfrak{r}_0|)} =$$

$$= \frac{1}{1-h(|\mathfrak{r}_0|)} f_0(\mathfrak{x}) \cdot h(|\mathfrak{r}|)$$

ist Funktion mit folgenden Eigenschaften:

1. $h(r) > 0$ definiert für alle $r \geq \min |\mathfrak{r}_0|$, $\mathfrak{r}_0$ durchläuft alle Punkte von FrK_0.

2. $h(r) \leq \varrho < 1$.

3. $h(r)$ ist monoton abnehmend im engeren Sinn und $\lim_{r \to +\infty} h(r) = 0$.

Aus der Konstruktion von K und den Eigenschaften der Funktion $h(r)$ folgt unmittelbar, daß 1. und 2. der Eigenschaften von K gilt. Denn aus $f(\mathfrak{x}) > f_0(\mathfrak{x})$ für $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}$ folgt, daß $K \subset K_0$ als echte Teilmenge enthält und $FrK_0 \cap K =$ leere Menge. Es bleibt noch Eigenschaft 3. zu beweisen, daß $\Delta(K) = \Delta(K_0)$. Trivial gilt, daß $\Delta(K) \leq \Delta(K_0)$. Es sei $\mathfrak{r}$ beliebig aus FrK, also $f(\mathfrak{r}) = 1$. Dazu gibt es umkehrbar eindeutig ein $\mathfrak{r}_0 = \lambda\mathfrak{r}$, so daß $f_0(\mathfrak{r}_0) = 1$, also $\mathfrak{r}_0$ am Rand von K_0 liegt. Dies folgt aus der Konstruktion. Es gibt genau ein δ mit $0 < \delta < 1$, so daß $\mathfrak{r}$ am Rand von K_δ liegt und $f_0(\mathfrak{r}_0)\frac{1}{1-\delta} = f_0(\mathfrak{r}_0)\frac{1}{1-h(|\mathfrak{r}_0|)}$. Daraus folgt $\delta = h(|\mathfrak{r}_0|)$.

Weil $h(r)$ monoton abnehmend im engeren Sinne ist, ist $h(|\mathfrak{x}|) < \delta$ für alle $\mathfrak{x}$ mit $|\mathfrak{x}| > |\mathfrak{r}_0|$. Daraus ergibt sich folgende wichtige Ungleichung

$$f_\delta(\mathfrak{x}) = \frac{1}{1-\delta} f_0(\mathfrak{x}) > \frac{1}{1-h(|\mathfrak{r}_0^*|)} f_0(\mathfrak{x}) = f(\mathfrak{x}), \text{ für } |\mathfrak{x}| > |\mathfrak{r}_0|.$$

Daraus ergibt sich $K_\delta \cap E\,\mathfrak{x}\{\,|\,\mathfrak{x}\,| > |\,\mathfrak{r}_0\,|\,\}$ besteht aus lauteren inneren Punkten der Menge $K \cap E\,\mathfrak{x}\{\,|\,\mathfrak{x}\,| > |\,\mathfrak{r}_0\,|\,\}$.

Wenn aber $\Delta(K) < \Delta(K_0)$ ist, gibt es ein zu K kritisches Gitter Γ mit $d(\Gamma) = \Delta(K) < \Delta(K_0)$.

1. Es gibt sicher ein δ mit $0 < \delta < 1$, so daß $d(\Gamma) < (1 - \delta)'' \Delta(K_0) = \Delta(K_\delta)$.

2. Nach obiger Überlegung gibt es zu diesem δ ein $|\,\mathfrak{r}_0\,|$, weil die Funktion $h(|\,\mathfrak{r}_0\,|)$ monoton ist und deshalb die Umkehrfunktion existiert. $K_\delta \cap E\mathfrak{x}\{\,|\,\mathfrak{x}\,| > |\,\mathfrak{r}_0\,|\,\}$ besteht dann aus lauter inneren Punkten von $K \cap E\mathfrak{x}\{\,|\,\mathfrak{x}\,| > |\,\mathfrak{r}_0\,|\,\}$. Nun ist aber K_δ voll automorph und voll reduzibel, so hat Γ nach dem Satz von *Davenport* und *C. A. Rogers* unendlich viele Gitterpunkte in K_δ, weil $d(\Gamma) < \Delta(K_\delta)$. In $K \cap E\mathfrak{x}\{\,|\,\mathfrak{x}\,| \leq |\,\mathfrak{r}_0\,|\,\}$ können aber nur endlich viele sein, also müssen in $K_\delta \cap E\mathfrak{x}\{\,|\,\mathfrak{x}\,| > |\,\mathfrak{r}_0\,|\,\}$ unendlich viele sein, diese sind aber innere Punkte von K. Dies gibt den gewünschten Widerspruch, weil Γ als K-kritisches Gitter keine Gitterpunkte im Inneren von K haben kann.

Der Sternkörper K hat unendlich viele kritische Gitter, die keinen Gitterpunkt am Rand von K haben. $A_K = \{\Gamma\}$ ist Menge der K-kritischen Gitter, A_{K_0} Menge der K_0 kritischen Gitter. $A_{K_0} \subset A_K$, weil 1. $\Delta(K_0) = \Delta(K)$ und 2. $K \subset K_0$. Alle kritischen Gitter von K_0 sind auch K-kritisch und haben nach Konstruktion keinen Gitterpunkt am Rand von K.

Weil K_0 voll automorph ist, gibt es unendlich viele kritische Gitter (denn mit Λ_0 ist auch $\Omega\,\Lambda_0$ kritisches Gitter. Die Ordnung der Gruppe Ω ist unendlich).

Dagegen ist es denkbar, daß A_{K_0} echte Teilmenge von A_K, d. h. es gibt ein K_0-kritisches Gitter, welches nicht K-kritisch ist. Es kann auch vorkommen, daß Λ auf FrK_0 einen Gitterpunkt hat.

§ 5

Satz 3: *Die Klasse* $\langle 0\rangle$ *ist nicht leer.*

Beweis: Es wird ein Sternkörper konstruiert aus dem vorhin mit K bezeichneten Sternkörper. Es kann $A_{K_0} = A_K$ sein, dann ist K bereits aus der Klasse $\langle 0\rangle$. Oder $A_{K_0} \subset A_K$ als echte Teilmenge, aber A_K besteht nur aus Gittern $K \cap \Gamma = \mathfrak{o}$ für alle $\Gamma \in A_K$, auch dann gehört K zur Klasse $\langle 0\rangle$. Es ist aber denkbar, daß es ein $\Gamma \in A_K$ gibt mit $K \cap \Gamma \neq \mathfrak{o}$. Mit $A_K{}^*$ werde bezeichnet die Menge aller K-kritischen Gitter, die wenigstens einen Gitterpunkt am Rand von K haben. Es werde vorausgesetzt, daß A_K nicht die leere Menge sei. Wenn $\Lambda^* \in A_K{}^*$ angenommen

wird, gibt es einen Gitterpunkt, $\mathfrak{g}^* \in \Lambda^*$, der am Rand von K liegt. $A_K^*(R)$ sei die Menge der K zulässigen Gitter, die einen Gitterpunkt $\mathfrak{g}$ am Rand von K haben, so daß $|\mathfrak{g}| \leq R = |\mathfrak{g}^*|$. Es ist $A_K^*(R) \subset A_K^*$, und $A_K^*(R)$ ist nicht leer (es gehört Λ^* zu $A_K^*(R)$). Nach dem Satz von *Davenport* und *Rogers* hat jedes Gitter $\Lambda \in A_K^*(R)$, noch mehr jedes Gitter aus A_K^*, unendlich viele Gitterpunkte im Inneren von K_0. (Es können auch Gitterpunkte auf FrK_0 liegen). Diese Gitterpunkte liegen alle in der Differenzenmenge $K_0 - K$, weil alle diese Gitter K zulässig sind.

Aus jedem $\Lambda \in A_K^*(R)$ werde ein Gitterpunkt $\mathfrak{g}(\Lambda)$ mit folgenden Eigenschaften gewählt: $\mathfrak{g}(\Lambda)$ entweder auf FrK, oder im Inneren von K_0. Zu jedem dieser Gitterpunkte $\mathfrak{g}(\Lambda)$ werde eine Spitze $S(\Lambda)$ konstruiert, so daß 1. $S(\Lambda)$ im Inneren von K_0 liegt, 2. $S(\Lambda)$ enthält $\mathfrak{g}(\Lambda)$ als inneren Punkt. Dann wird der Sternkörper $K \cup U S(\Lambda) = K(R)$ über alle $\Lambda \in A_K^*(R)$ konstruiert. Dieser Sternkörper $K(R)$ hat nach Konstruktion kein zulässiges Gitter aus $A_K^*(R)$, denn jedes Gitter $\Lambda \in A_K^*(R)$ hat einen Gitterpunkt im Inneren von $K(R)$. Weil $K(R) \subset K_0$, $FrK_0 \cap K(R) =$ leere Menge, $K \subset K(R)$, so gilt $A_{K_0} \subset A_{K(R)}$. $K(R)$ hat kein kritisches Gitter Λ, das einen Gitterpunkt auf FrK mit $|\mathfrak{x}| \leq R$ hat: $FrK(R) \cap E\mathfrak{x}\{|\mathfrak{x}| \leq R\} =$ leere Menge.

Auf den Sternkörper $K(R)$ wird dasselbe Schlußverfahren angewendet; es ist leicht einzusehen, daß die Menge A_K durch die Menge $A_{K(R)} = A_K - A_K^*{}_{(R)}$ zu ersetzen ist. $A^*{}_{K(R)}$ ist Menge aller $K(R)$ kritischen Gitter mit mindestens einem Gitterpunkt am Rand. Entweder ist sie leer, dann gehört bereits $K(R)$ zur Klasse $\langle 0 \rangle$. Ist sie nicht leer, gibt es ein $\Lambda \in A^*{}_{K(R)}$ mit $\mathfrak{g}$ auf $FrK(R)$. $|\mathfrak{g}|$ werde mit R_1 bezeichnet. Dann werde wie oben der Sternkörper $K(R_1)$ konstruiert. Im allgemeinen Fall wird man eine Folge $R_i \to \infty$ erhalten. Diese Folge kann auch abbrechen. Nach Konstruktion ist der Sternkörper $\lim_{i \to \infty} K(R_i) = \bar{K}$ 1. $\bar{K} \subset K$, 2. $FrK \cap \bar{K} =$ leere Menge (oder $\bar{K}$ besteht aus lauter inneren Punkten von K), 3. $\Delta(\bar{K}) = \Delta(K)$. Daß $A_K \subset A_{\bar{K}}$ enthalten ist, ist klar. Die Menge $A_{\bar{K}}$ hat folgende Eigenschaft: $\bar{K} \cap \Gamma = 0$ für alle $\Gamma \in A_{\bar{K}}$. Der Sternkörper $\bar{K}$ gehört also zu Klasse $\langle 0 \rangle$.

Der vorhin mit 2 bezeichnete Satz kann nun zum Satz 2a verallgemeinert werden.

Satz 2a: Kennt man im R_n einen voll automorphen und voll reduziblen Sternkörper K; dies ist der Fall für R_n $n = 2, 3, 4$; so ist keine Klasse $\langle k \rangle$ $k = 0, 1, 2, \ldots$ leer, d. h. es gibt bei vorgegebenem k einen Sternkörper,

der ein kritisches Gitter mit Maximalanzahl k von primitiven Gitterpunkten am Rand von K hat. Dagegen hat der Sternkörper kein k + h kritisches Gitter mehr, wenn h natürliche Zahl und beliebig ist.

Beweis: Aus Satz 3 folgt, daß die Klasse ⟨0⟩ nicht leer ist. K sei Sternkörper aus der Klasse ⟨0⟩. $A_K = \{\Gamma\}$ sei Menge der kritischen Gitter von K, diese Menge ist in der Mahler'schen Topologie kompakt. Von dieser Menge kann ohne weiteres angenommen werden, daß sie unendliche viele Elemente hat, ein solcher Sternkörper wurde konstruiert. Bei beliebigem R, muß folgendes gelten: $\delta(K \cap E\mathfrak{x}\{|\mathfrak{x}| \leq R\}, \Gamma)$ Γ beliebig aus A_K, $\delta \geq \delta(R) > 0$.

Denn wäre $\delta = 0$, gäbe es eine Gitterfolge aus $A_K\{\Gamma_i\}$ mit

$$\delta(K \cap E\mathfrak{x}\{|\mathfrak{x}| \leq R\}, \Gamma_i) = \delta_i \quad \lim_{i\to\infty} \delta_i = 0.$$

Nach dem Mahler'schen Auswahlsatz gibt es eine konvergente Teilfolge $\{\Gamma_i'\}$ $\lim_{i\to\infty} \Gamma_i' = \Gamma$. $\Gamma \in A_K$, weil A_K eine kompakte Menge ist. $\delta(K \cap E\mathfrak{x}\{|\mathfrak{x}| \leq R\}, \Gamma) = 0$. Es hat Γ sicher einen Gitterpunkt am Rand von K, was natürlich nicht sein kann, weil K aus der Klasse ⟨0⟩.

Aus dieser Überlegung läßt sich ein Sternkörper K aus jeder Klasse konstruieren. Γ sei beliebig aus A_K. Man wählt R so groß, daß k Gitterpunktpaare in $E\mathfrak{x}\{|\mathfrak{x}| \leq R\}$ liegen mit folgender Eigenschaft:

$$\overline{K\mathfrak{g}_1} = \min \delta\,(K \cap E\mathfrak{x}\{|\mathfrak{x}| \leq R\}, \Gamma) \quad \Gamma \in A_K \text{ fest}$$

$$\overline{K\mathfrak{g}_2} = \min_{\mathfrak{g} \neq \mathfrak{g}_1} \delta\,(K \cap E\mathfrak{x}\{|\mathfrak{x}| \leq R\}, \Gamma)$$

$$\overline{K\mathfrak{g}_k} = \min_{\mathfrak{g} \neq \mathfrak{g}_1, \cdots, \mathfrak{g}_{k-1}} \delta\,(K \cap E\mathfrak{x}\{|\mathfrak{x}| \leq R\}, \Gamma)$$

Nun werden Spitzen mit diesen Gitterpunkten konstruiert. Das Gitter Γ' wird so zu einem k-kritischen Gitter. Es ist denkbar, daß es zu diesem Sternkörper noch weitere kritische Gitter aus A_K gibt, mit Gitterpunkten am Rande. Es wird gezeigt, daß sie nur weniger als k Gitterpunkte am Rande dieses neuen Sternkörpers haben können. Wenn man R hinreichend groß wählt, werden die Abstände genügend klein gegenüber der Diskriminante des Sternkörpers. Auch die Spitzen werden schmal gegenüber $\Delta(K)$ gewählt. Angenommen ein anderes Gitter $\Lambda \in A_K$ habe als k Gitterpunkte am Rand von $K \cup S$. Diese Gitterpunkte können nur auf den Spitzen liegen, nicht auf FrK. Denn K war aus Klasse ⟨0⟩. Es müßten 2 Gitterpunkte auf einer Spitze liegen, die Gitterpunkte liegen sehr nahe, also liegt ein anderer im Inneren von K, was zum Widerspruch führt.

Die oben genannten Resultate in Satz 2a können auch etwas anders formuliert werden: $f(\mathfrak{x})$ sei reelle, stetige Funktion mit den Eigenschaften $f(\mathfrak{x}) \geq 0$ und $f(t\mathfrak{x}) = |t| f(\mathfrak{x})$. Faßt man $\mathfrak{x}$ als n-Tupel von Linearformen $(L_1, \ldots L_n)$ mit $det = 1$ auf, so läßt sich die Menge dieser Funktionen in Klassen einteilen. Man betrachtet alle Systemen von Linearformen $(L_1, \ldots L_n$ mit $f(\mathfrak{x}) \geq M(f)$. Es gibt nun Funktionen mit diesen Eigenschaften, daß $f(\mathfrak{x}) = M(f)$ maximal für k (k natürliche Zahl, 0 oder ∞) n-Tupel ganzer Zahlen erfüllt ist. Es gibt aber kein System von Linearformen, das $k + h$ (h natürliche Zahl) Lösungen für $f(\mathfrak{x}) = M(f)$ wäre.

§ 6

1. Wenn S eine quadrierbare Punktmenge im R_n bedeutet, so ist, wie *E. Hlawka* gezeigt hat $Q(S) = \dfrac{V(S)}{\Delta(S)} \geq 1$. Ist aber S aus der Klasse der Sternbereiche, so gilt mehr $Q(S) \geq \zeta(n)$[1] ($\zeta(n)$ Riemannsche ζ-Funktion). Sicher gilt für S aus der Klasse der Sternkörper also $V(S) \geq$ $\geq 2\,\zeta(n)\,\Delta(S)$. Dies kann folgendermaßen gedeutet werden: Für alle Sternkörper S mit $\Delta(S) = \Delta$ vorgegeben, ist das Volumen von S nach unten beschränkt. $V(S)$ ist selbstverständlich nach oben nicht beschränkt für alle S mit $\Delta(S) = \Delta$.

2. Das Funktional $\Delta(S)$ hat folgende Eigenschaft: Es sei $\{S_i\}$ eine monotone Folge mit Grenzwert $S_i \subset S_{i+1}$, $\lim\limits_{i\to\infty} S_i = S = \overset{\infty}{\underset{i=1}{U}} S_i$, dann ist $\lim\limits_{i\to\infty} \Delta(S_i) = \Delta(S)$. Dies gilt auch dann, wenn S vom unendlichen Typus ist.

Satz 4: *K sei nicht beschränkter Sternkörper im R_n mit Volumen $V(K) =$ $= V > 0$. Dann ist K vom endlichen Typus, d. h. es existiert ein zulässiges Gitter, weiter existiert $\Delta(K)$ und ist endlich.*

Beweis: $K_T = K \cap Q_T$ ist das abgeschlossene Intervall

$$-T \leq x_i \leq +T \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Angenommen K sei vom unendlichen Typus $\Delta(K) = +\infty$. Dann ist $\lim\limits_{T\to\infty} \Delta(K_T) = +\infty$, d. h. zu jedem $M > 0$ gibt es ein $T_0(M)$, so daß für $T > T_0$ (1) $\Delta(K_T) > M \geq V \geq V(K_T)$.

Selbstverständlich gilt $V(K_T) \leq V$. Andererseits gilt (2)

$$\Delta(K_T) \leq \frac{1}{2\,\zeta(n)}\, V(K_T)$$

[1] Diese Schranke wurde bereits von *W. Schmidt* verbessert.

für alle $T > 0$. Daraus folgt:

$$\Delta(K_T) > M \ (M \text{ bel}) \text{ z. B. } M = c_n V \qquad c_n = \frac{1}{2}\zeta(n)$$

$$\Delta(K_T) \leq c_n V.$$

Man erhält einen Widerspruch.

Dieser Satz liefert also eine hinreichende Bedingung dafür, ob ein Sternkörper vom endlichen Typus ist.

Literatur

K. Mahler: Proc. Lond. Math. Soc. **49** (1942)
H. Davenport und *C. A. Rogers*: Phil. Trans., Ser. A, Vol. **242** ,1950
E. Hlawka: Jahresbericht d. DMV, Bd. **57** (1954)

Kinematische Fragen in der Projektivgeometrie der Regelflächen

Von

Martin Barner, Freiburg i. Br.

(Eingelangt am 25. Juli 1955)

Die *projektive Kinematik* beschäftigt sich auch mit Fragen der Abwicklung zweier gleichartiger einparametriger Gebilde aufeinander. An anderer Stelle haben wir die Abwicklung einer Kurve des dreidimensionalen Raumes auf eine Komplexkurve betrachtet[1]. Hier sollen mit den Methoden der projektiven Kinematik unter anderem die geometrischen Eigenschaften der *Projektivabwicklung einer Regelfläche auf eine Komplexregelfläche unter Auszeichnung zweier Asymptotenlinien* untersucht werden.

Es zeigt sich, daß mit einer Regelfläche des dreidimensionalen projektiven Raumes unter Auszeichnung zweier ihrer Asymptotenlinien eine Geradenkongruenz, und zwar ein W-Strahlsystem invariant verknüpft ist, dessen Brennflächen Komplexflächen sind. Die Kongruenz entsteht in einer projektiven Bewegung aus einer Komplexregelfläche. Die Bahnkurven der Bewegung bilden die einparametrige Schar von Komplexregelflächen projektiv aufeinander ab und stellen damit eine geraden- und punktweise Zuordnung der Komplexregelflächen untereinander und zu der Ausgangsregelfläche her.

In dieser Abbildung entsprechen sich einmal die Asymptotenlinien der Regelflächen, zum anderen auch die Invarianten $\mathfrak{a}$, α_1, α_2 der Ausgangsregelfläche und der Komplexregelflächen, falls man diese auf ihre ausgezeichneten Asymptotenlinien bzw. deren Bilder bezieht. Die Invariante α_0 verschwindet für die Komplexregelflächen. In der Kongruenz trennen die Torsallinien das durch die erzeugenden Komplexregelflächen definierte Richtungsfeld von den Bahnkurven harmonisch.

---

[1] *M. Barner*, Zur Kinematik der Projektivabwicklung von Raumkurven. Math. Nachrichten **14**, 1—16 (1955).

Diese Ergebnisse stehen in Analogie zu bekannten Aussagen in der euklidischen Geometrie. Rollt man etwa eine Kurve des euklidischen Raumes über ihre Tangentenfläche in die Ebene ab, so sind beide Kurven längentreu aufeinander bezogen und ihre (ersten) Krümmungen stimmen überein. Deutet man diese Abwicklung kinematisch und betrachtet die Bahnkurven, die die in den Schmiegebenen der Raumkurve ausgezeichneten ebenen Kurven ineinander überführen, so gilt hier: Mit einer Kurve des euklidischen Raumes ist an jeder Stelle eine ebene Kurve so invariant verbunden, daß diese Kurven entlang der Raumkurve eine Fläche mit ebenen Krümmungslinien erzeugen. Die zweite Schar von Krümmungslinien bildet die ebenen Kurven kongruent aufeinander und diese punktweise auf die Ausgangskurve ab. Diese Abbildung ist längentreu und es entsprechen sich in ihr die ersten Krümmungen.

Diese Formulierung zeigt die längentreue Beziehung als eine Folge des kinematischen Vorganges. Dies beleuchtet das Wesen der von uns behandelten „Projektivabwicklung" einer Regelfläche (bzw. einer Raumkurve), bei der es von vornherein nicht sinnvoll wäre, von „Längentreue" zu sprechen.

Das euklidische Beispiel zeigt weiter, daß die Ausgangskurve eine singuläre Kurve der Fläche mit ebenen Krümmungslinien ist und von diesen eingehüllt wird. Ebenso ist auch die Ausgangsregelfläche singuläre Geradengesamtheit in der zugehörigen Kongruenz, und diese Regelfläche wird von den Komplexregelflächen eingehüllt, wobei geradengeometrisch eine Berührung in zweiter Ordnung auftritt. Desgleichen sind die ausgezeichneten Asymptotenlinien der Ausgangsregelfläche singuläre Kurven auf den Brennflächen der Kongruenz und werden dort von den erzeugenden Komplexkurven eingehüllt, wobei es sich geradengeometrisch um eine Berührung in dritter Ordnung handelt.

Die ausgesprochenen Ergebnisse sind geradengeometrischer Natur. Man arbeitet deshalb zweckmäßigerweise im *Klein*schen Geradenraum. Im Bildraum wird zuerst kurz in die Theorie der Regelflächen des R_3 unter Auszeichnung zweier Asymptotenlinien eingeführt [1][2]. Dann werden die zugehörigen speziellen Zentralbewegungen behandelt [2]. Aus ihrer Deutung im Urbildraum ergeben sich unmittelbar die formulierten Ergebnisse [3].

Die lose aneinander gereihten Bemerkungen der Abschnitte 4 und 5 sollen diese Ergebnisse abrunden und auch auf andere kinematische

[2] Die Nummern in eckigen Klammern verweisen hier auf die Abschnitte und Unterabschnitte des Textes.

Fragen in der Theorie der Regelflächen aufmerksam machen. Der Abschnitt 4 gibt den kinematischen Zugang zur Theorie der Regelflächen; dieser führt insbesondere direkt auf die von *G. Bol* eingeführte hyperbolische Abbildung [4b]. Hierbei wird auf einige Aussagen im Großen u. a. über die Mindestanzahl der Wendepunkte der geschlossenen Asymptotenlinien geschlossener Regelflächen hingewiesen [4c]. Die genannten singulären Kurven der Komplexflächen werden analytisch betrachtet [4d].

Man kann die Abwicklung einer Regelfläche auf eine Komplexregelfläche wiederholen, indem man nacheinander verschiedene Paare von Asymptotenlinien auszeichnet. Nach dreimaliger Abwicklung gelangt man zu einer Abbildung der Regelfläche auf die Geradenschar einer Quadrik [5a]. Diese Abbildung ist von der Auswahl der Abwicklungen unabhängig und kann ebenfalls wieder durch eine gewisse Zentralbewegung auch direkt analytisch dargestellt werden [5b]. Damit gewinnt man einen neuen Zugang zu dieser bereits von *E. Cartan* betrachteten Projektivabwicklung.

Der letzte Abschnitt [6] gibt einen kurzen Überblick über die entsprechenden Ergebnisse in der *Lie*schen Kugelgeometrie, wobei insbesondere auf die Realitätsunterschiede hingewiesen wird.

Die in diesen Untersuchungen aufgetretenen projektiven Bewegungen sind spezielle *Zentralbewegungen*. Diese Bewegungen des R_n, in denen eine Ebene der Dimension k so bewegt wird, daß die Tangenten an die von Punkten der Ebene auslaufenden Bahnkurven alle durch einen Punkt gehen (oder allgemeiner: eine Ebene der Dimension m treffen), spielen bei verschiedenen Fragen der projektiven Differentialgeometrie eine Rolle. Auf die allgemeine Theorie der Zentralbewegungen hoffen wir deshalb bei Gelegenheit zurückzukommen.

1. Spezielle Kurzenpaare auf Quadriken des $\mathbf{R}_5$

Auf einer Quadrik $\mathfrak{Q}$

$$< \mathfrak{p}, \mathfrak{p} > \equiv \sum_{i,k=0}^{5} \mathfrak{a}_{ik}\, \mathfrak{p}_i\, \mathfrak{p}_k = 0, \quad \mathfrak{a}_{ik} = \mathfrak{a}_{ki} \tag{1,1}$$

des projektiven $\mathbf{R}_5$ seien zwei Kurven

$$\mathfrak{z}_1(t), \quad \mathfrak{z}_2(t) \tag{1,2}$$

gegeben, deren Tangenten sich treffen und deren Tangenten auf $\mathfrak{Q}$ liegen. Es sei

$$\mathfrak{x}(t) \tag{1,3}$$

der Treffpunkt der Tangenten. Analytisch drücken sich dann die Voraussetzungen in

$$< \mathfrak{z}_i, \mathfrak{z}_i > = < \mathfrak{z}_i, \mathfrak{x} > = < \mathfrak{x}, \mathfrak{x} > = 0, \quad i = 1, 2 \tag{1,4}$$

aus. Hieraus folgt bei Differentiation wegen der Bedeutung von $\mathfrak{x}(t)$

$$< \mathfrak{z}_i, \mathfrak{x}' > = < \mathfrak{z}_i, \mathfrak{x}'' > = 0, \quad i = 1, 2. \tag{1,5}$$

Es sei ferner

$$< \mathfrak{x}', \mathfrak{x}' > \neq 0.$$

Wie denken uns den Vektor $\mathfrak{x}(t)$ so normiert, daß

$$< \mathfrak{x}', \mathfrak{x}' > = \varkappa = \text{const} \tag{1,6}$$

gilt. Es ist dann

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{x}'' - \mathfrak{a}\,\mathfrak{x} \quad \text{mit} \quad -2\,\mathfrak{a}\,\varkappa = < \mathfrak{x}'', \mathfrak{x}'' > \tag{1,7}$$

ein Punkt der Quadrik $\mathfrak{Q}$ für jedes t.

Die Normierung der Vektoren $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$ wollen wir so festlegen, daß die Ableitungsgleichungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}_1' &= \alpha_1\,\mathfrak{x}, \\ \mathfrak{z}_2' &= \alpha_2\,\mathfrak{x} \end{aligned} \tag{1,8}$$

bestehen. Dies ist immer möglich, wenn die Punkte $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$ von $\mathfrak{x}$ verschieden sind. Dies sei vorausgesetzt. Umnormung mit Konstanten erhält die Gleichungen (8). Da nach (8) und (4)

$$< \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2 >' = \alpha_1 < \mathfrak{x}_1, \mathfrak{z}_2 > + \alpha_2 < \mathfrak{z}_1, \mathfrak{x} > = 0$$

ist, so können wir durch Umnormung mit Konstanten

$$< \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2 > = \varkappa \tag{1,9}$$

erreichen, wobei $\varkappa$ in (6) definiert wurde. Auch dies denken wir uns von vornherein so eingerichtet.

Die Hyperebene $(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{x}, \mathfrak{x}', \mathfrak{y})$ ist nicht Tangentenebene an die Quadrik $\mathfrak{Q}$. Der zu ihr polare Punkt $\mathfrak{z}_0$ liegt also nicht in dieser Hyperebene. Wir können also die Vektoren

$$\mathfrak{x}, \mathfrak{t}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_0$$

mit

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{x}' \tag{1,10}$$

als Basisvektoren eines bewegten Bezugssystems verwenden. Für diese Vektoren gilt (bei geeigneter Normierung von $\mathfrak{z}_0$) bezüglich (1) die *Produkttabelle*

$<,>$	$\mathfrak{x}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{y}$	$\mathfrak{d}_0$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_2$
$\mathfrak{x}$	0	0	$-\varkappa$	0	0	0
$\mathfrak{t}$	0	$\varkappa$	0	0	0	0
$\mathfrak{y}$	$-\varkappa$	0	0	0	0	0
$\mathfrak{d}_0$	0	0	0	$\varepsilon\varkappa$	0	0
$\mathfrak{d}_1$	0	0	0	0	0	$\varkappa$
$\mathfrak{d}_2$	0	0	0	0	$\varkappa$	0

(1,11)

$$\varepsilon = \pm 1.$$

Dies ergibt sich in Zusammenfassung von (4), (5), (6), (7), (9) und der Definition von $\mathfrak{d}_0$.

Aus der Produkttabelle folgen in Verbindung mit (7), (8) und (10) sofort die Ableitungsgleichungen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{x}' &= \mathfrak{t}, \\
\mathfrak{t}' &= \mathfrak{y} + \mathfrak{a}\,\mathfrak{x}, \\
\mathfrak{y}' &= \mathfrak{a}\,\mathfrak{t} + a_0\,\mathfrak{d}_0 + a_2\,\mathfrak{d}_1 + a_1\,\mathfrak{d}_2, \\
\mathfrak{d}_0' &= \varepsilon\,\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{x}, \\
\mathfrak{d}_1' &= \mathfrak{a}_1\,\mathfrak{x}, \\
\mathfrak{d}_2' &= \mathfrak{a}_2\,\mathfrak{x}.
\end{aligned} \tag{1,12}$$

Die durchgeführten Überlegungen und aufgestellten Formeln gelten für eine beliebige, aber festgewählte Parameterverteilung. Bei einer Parametertransformation

$$t = f(t^*),\ \varphi(t) = \frac{dt^*}{dt},\ A = \frac{1}{2}\,\frac{\varphi'}{\varphi} \tag{1,13}$$

bleiben (6) bzw. (8) nur richtig, wenn wir gleichzeitig eine Umnormung

$$\mathfrak{x}^* = \varphi\,\mathfrak{x} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{d}_i^* = \mathfrak{d}_i,\quad i = 0, 1, 2 \tag{1,14}$$

vornehmen. Die gemeinsame Transformation (13), (14) heißt *Sterntransformation*.

Bei Sterntransformation ist

$$\begin{aligned}
\mathfrak{x}^* &= \varphi\,\mathfrak{x}, \\
\mathfrak{t}^* &= \mathfrak{t} + 2A\,\mathfrak{x}, \\
\mathfrak{y}^* &= \varphi^{-1}(\mathfrak{y} + 2A\mathfrak{t} + 2A^2\,\mathfrak{x}), \\
\mathfrak{d}_0^* &= \mathfrak{d}_0, \\
\mathfrak{d}_1^* &= \mathfrak{d}_1, \\
\mathfrak{d}_2^* &= \mathfrak{d}_2;
\end{aligned} \tag{1,15}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}^* &= \varphi^{-2}(\mathfrak{a} + 2A' - 2A^2), \\
a_i^* &= \varphi^{-2}\,a_i, \qquad i = 0, 1, 2.
\end{aligned} \tag{1,16}$$

Wir fassen zusammen: *Ein Kurvenpaar auf einer Quadrik des* $\mathbf{R}_5$, *bei dem die Tangenten an die Kurven sich treffen und auf der Quadrik liegen, ist durch die Gleichungen* (11), (12), (15), (16) *gekennzeichnet.* Geometrisch folgt insbesondere: *Mit einem solchen Kurvenpaar ist eine Hyperebene invariant verbunden, die aufgespannt wird von den beiden Schmiegräumen der Dimension drei der Ausgangskurven.* Daraus folgt: *Kurvenpaare, deren Kurven in einer gemeinsamen festen Hyperebene des* $\mathbf{R}_5$ *liegen, sind durch*

$$\alpha_0 = 0 \tag{1,17}$$

gekennzeichnet.

In lokalen Koordinaten

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0\,\mathfrak{x} + \mathfrak{p}_1\,\mathfrak{t} + \mathfrak{p}_2\,\mathfrak{y} + \mathfrak{p}_3\,\mathfrak{z}_0 + \mathfrak{p}_4\,\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{p}_5\,\mathfrak{z}_2 \tag{1,18}$$

lautet die Gleichung der festen Quadrik, auf der die Kurven $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$ und $\mathfrak{x}$ liegen

$$<\mathfrak{p}, \mathfrak{p}> \equiv -2\,\mathfrak{p}_0\,\mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_1^{\,2} + \varepsilon\,\mathfrak{p}_3^{\,2} + 2\,\mathfrak{p}_4\,\mathfrak{p}_5 = 0. \tag{1,19}$$

2. Die zum Kurvenpaar gehörende Zentralbewegung

Es werde nun die Hyperebene $(\mathfrak{x}, \mathfrak{t}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2)$ so projektiv bewegt, daß die Tangenten an die Bahnkurven, die von Punkten der Hyperebene auslaufen, den zu der Hyperebene polaren Punkt $\mathfrak{z}_0$ treffen.

Um diese Bewegung[3] analytisch zu fassen, denken wir uns die Hyperebene aufgespannt von den Punkten

$$\mathfrak{e}_0, \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3, \mathfrak{e}_4. \tag{2,1}$$

Die Vektoren (1) seien als Basis des bewegten Bezugssystems so gewählt, daß jeder Punkt

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_0\,\mathfrak{e}_0 + \mathfrak{q}_1\,\mathfrak{e}_1 + \mathfrak{q}_2\,\mathfrak{e}_2 + \mathfrak{q}_3\,\mathfrak{e}_3 + \mathfrak{q}_4\,\mathfrak{e}_4 \tag{2,2}$$

mit

$$\mathfrak{q}_i = \text{const} \tag{2,3}$$

eine Bahnkurve in der Bewegung beschreibt. Wir können dann diese Basis (1) außerdem so wählen, daß die Basisvektoren zusammen mit

$$\mathfrak{e}_5 = \mathfrak{z}_0 \tag{2,4}$$

die Produkttabelle [vgl. (1, 11)]

[3] Der Begriff „Bewegung" tritt in dieser Arbeit nur in kinematischem Sinne auf.

$<,>$	$\mathfrak{e}_0$	$\mathfrak{e}_1$	$\mathfrak{e}_2$	$\mathfrak{e}_3$	$\mathfrak{e}_4$	$\mathfrak{e}_5$
$\mathfrak{e}_0$	0	0	$-\varkappa$	0	0	0
$\mathfrak{e}_1$	0	$\varkappa$	0	0	0	0
$\mathfrak{e}_2$	$\varkappa$	0	0	0	0	0
$\mathfrak{e}_3$	0	0	0	0	$\varkappa$	0
$\mathfrak{e}_4$	0	0	0	$\varkappa$	0	0
$\mathfrak{e}_5$	0	0	0	0	0	$\varepsilon\varkappa$

(2,5)

bezüglich des Produktes (1,1) erfüllen.

Die $\mathfrak{e}_i$ genügen dann den Ableitungsgleichungen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{e}_0' &= \beta_2\,\mathfrak{e}_5,\\
\mathfrak{e}_1' &= -\beta_1\,\mathfrak{e}_5,\\
\mathfrak{e}_2' &= \beta_0\,\mathfrak{e}_5,\\
\mathfrak{e}_3' &= -\beta_4\,\mathfrak{e}_5,\\
\mathfrak{e}_4' &= -\beta_3\,\mathfrak{e}_5,\\
\mathfrak{e}_5' &= \varepsilon(\beta_0\,\mathfrak{e}_0+\beta_1\,\mathfrak{e}_1+\beta_2\,\mathfrak{e}_2+\beta_3\,\mathfrak{e}_3+\beta_4\,\mathfrak{e}_4).
\end{aligned} \tag{2,6}$$

Aus (4) folgt an Hand der letzten Gleichung (1,12)

$$\mathfrak{e}_5' = \mathfrak{z}_0' = \varepsilon\,\alpha_0\,\mathfrak{x}. \tag{2,7}$$

Die mit dem Ausgangskurvenpaar verknüpfte Kurve $\mathfrak{x}(t)$ besitzt also nach (7) und (6) in dem bewegten Bezugssystem der betrachteten Bewegung die Darstellung

$$\alpha_0\,\mathfrak{x} = \beta_0\,\mathfrak{e}_0+\beta_1\,\mathfrak{e}_1+\beta_2\,\mathfrak{e}_2+\beta_3\,\mathfrak{e}_3+\beta_4\,\mathfrak{e}_4. \tag{2,8}$$

Hieraus folgen für die β_i und α_0 aus (1,4), (1,6) in Verbindung mit (5) die Relationen

$$\begin{aligned}
\alpha_0^2 <\mathfrak{x},\mathfrak{x}> &= \varkappa(-2\,\beta_0\beta_2+\beta_1^2+2\,\beta_3\beta_4)=0,\\
\varkappa^{-1} <\mathfrak{x}',\mathfrak{x}'> &= \alpha_0^{-2}(-2\,\beta_0'\beta_2'-\beta_1'^2+2\,\beta_3'\beta_4')=1.
\end{aligned} \tag{2,9}$$

Wir sahen, mit dem Ausgangskurvenpaar ist eine Hyperebene invariant verbunden. Diese Hyperebene nun wiederum läßt sich in eindeutiger Weise so bewegen, daß die Tangenten an die Bahnkurven den zu ihr polaren Punkt treffen. Wir wollen nun den Zusammenhang untersuchen, der zwischen der Ausgangsfigur einerseits und der Spur dieser Figur in der bewegten Ebene andererseits besteht. Wir können uns vorstellen, daß die bewegte Hyperebene über die einparametrige Hyperebenenschar in der beschriebenen Weise abrollt, wodurch natürlich auch das Kurvenpaar $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$ und die zugehörige Kurve $\mathfrak{x}$ sich in die Hyperebene abbildet.

(8) gibt uns bereits den analytischen Zusammenhang zwischen der Kurve $\mathfrak{x}(t)$ auf der Quadrik des $\mathfrak{R}_5$, die zu unserer Ausgangsfigur gehört, und der hyperebenen Spur dieser Kurve. Wir wollen diese Spurkurve zur Unterscheidung durch den Vektor $\overset{=}{\mathfrak{x}}(t)$ kennzeichnen. Diese Kurve des bewegten Bezugssystems erhalten wir in (8) einfach, indem wir dort die $\mathfrak{e}_i$ als konstante Vektoren betrachten. Es folgt dann wegen (9)

$$\begin{aligned} \overset{=}{\mathfrak{x}} &= \mathfrak{x}, \\ \overset{=}{\mathfrak{x}}' &= \mathfrak{x}', \\ \overset{=}{\mathfrak{x}}'' &= \mathfrak{x}'', \\ \overset{=}{\mathfrak{x}}''' &= \mathfrak{x}''' + \alpha_0\, \mathfrak{z}_0. \end{aligned} \tag{2,10}$$

Wir wollen auch die Spuren der Kurven des Ausgangskurvenpaares aufsuchen und setzen hierzu

$$\mathfrak{z}_i = z_0^i\, \mathfrak{e}_0 + z_1^i\, \mathfrak{e}_1 + z_2^i\, \mathfrak{e}_2 + z_3^i\, \mathfrak{e}_3 + z_4^i\, \mathfrak{e}_4, \quad i = 1, 2. \tag{2,11}$$

Die beiden Punkte $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$ sind für jedes t dadurch eindeutig bestimmt, daß der zu der Geraden $(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2)$ polare Raum der Dimension drei von $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{z}_0$ aufgespannt wird. Insbesondere ist also (man vgl. (8) und (11))

$$-z_0^i\, \beta_2 + z_1^i\, \beta_1 - z_2^i\, \beta_0 + z_3^i\, \beta_4 + z_4^i\, \beta_3 = 0, \quad i = 1, 2. \tag{2,12}$$

Damit folgt aber aus (11) mittels (6)

$$\begin{aligned} \overset{=}{\mathfrak{z}}_i &= \mathfrak{z}_i, \\ \overset{=}{\mathfrak{z}}_i' &= \mathfrak{z}_i', \end{aligned} \qquad i = 1, 2, \tag{2,13}$$

wobei auch hier wieder mit $\overset{=}{\mathfrak{z}}_i$ die zu der Kurve $\mathfrak{z}_i$ gehörende Kurve des bewegten Systems (der bewegten Hyperebene) bezeichnet wurde.

(10) und (13) lehrt nun aber: *Genügt das Ausgangskurvenpaar des festen Systems den Ableitungsgleichungen* (1,12), *so genügt das zugehörende Kurvenpaar des bewegten Systems den Gleichungen*

$$\begin{aligned} \overset{=}{\mathfrak{x}}' &= \overset{=}{\mathfrak{t}}, \\ \overset{=}{\mathfrak{t}}' &= \overset{=}{\mathfrak{y}} + \overset{=}{\mathfrak{a}}\, \overset{=}{\mathfrak{x}}, \\ \overset{=}{\mathfrak{y}}' &= \overset{=}{\mathfrak{a}}\, \overset{=}{\mathfrak{t}} + \overset{=}{\alpha}_0\, \overset{=}{\mathfrak{z}}_0 + \overset{=}{\alpha}_2\, \overset{=}{\mathfrak{z}}_1 + \overset{=}{\alpha}_1\, \overset{=}{\mathfrak{z}}_2, \\ \overset{=}{\mathfrak{z}}_0' &= \varepsilon\, \overset{=}{\alpha}_0\, \overset{=}{\mathfrak{x}}, \\ \overset{=}{\mathfrak{z}}_1' &= \overset{=}{\alpha}_1\, \overset{=}{\mathfrak{x}}, \\ \overset{=}{\mathfrak{z}}_2' &= \overset{=}{\alpha}_2\, \overset{=}{\mathfrak{x}}, \end{aligned} \tag{2,14}$$

wobei zwischen den Invarianten die Beziehungen

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\mathfrak{a}} &= \mathfrak{a}, \\ \overset{\circ}{\alpha}_i &= \alpha_i, \qquad i = 1, 2 \\ \overset{\circ}{\alpha}_0 &= 0 \end{aligned} \tag{2,15}$$

bestehen.

Wir können auch so sagen: *Mit einem Kurvenpaar ist an jeder Stelle projektivinvariant ein hyperebenes Kurvenpaar verknüpft, dessen Kurven die Kurven des Ausgangspaares in dritter Ordnung berühren. Diese hyperebenen Kurvenpaare sind entlang dem Ausgangskurvenpaar durch die Bewegung* (6) *projektiv aufeinander abgebildet, und zwischen ihren Punkten und den Punkten des Ausgangspaares ist eine eindeutige Beziehung durch die Bahnkurven in der Bewegung* (6) *hergestellt. Bei dieser Zuordnung entsprechen sich die Invarianten des Ausgangspaares und der hyperebenen Paare. Für letztere ist* $\overset{\circ}{\alpha}_0 = 0$.

3. Projektivabwicklung der Regelflächen des $\mathbf{R}_3$

Uns kommt es hier auf die Folgerungen an, die man für die Geometrie des projektiven dreidimensionalen Raumes ziehen kann, wenn man den $\mathbf{R}_5$ als *Klein*schen Geradenraum deutet. (Die entsprechenden Ergebnisse für die *Lie*sche Kugelgeometrie sind im Abschnitt 6 kurz zusammengefaßt.)

Den Ausgangskurven $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$ des $\mathbf{R}_3$ entsprechen im Urbild-R_3 zwei Torsen; die Punkte der Tangenten $(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{x})$ bzw. $(\mathfrak{z}_2, \mathfrak{x})$ gehören zu Geraden des R_3, die die Geradenbüschel in der Schmiegebene dieser Torsen aufspannen. Die Gerade des R_3, deren Bild im Geradenraum der Punkt $\mathfrak{x}$ ist, gehört beiden Geradenbüscheln an und beschreibt also eine Regelfläche, auf der die Ausgangskurven mit dem Bild $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$ Asymptotenlinien sind. *Die betrachtete Figur des* $\mathbf{R}_5$ *ist äquivalent der Figur zweier Asymptotenlinien einer Regelfläche, wenn man den* $\mathbf{R}_5$ *als Kleinschen Geradenraum deutet.* Man spricht auch von zwei *asymptotisch transformierten Kurven* (erster Stufe).

Durch $\alpha_0 = 0$ (vgl. (1,17)) sind insbesondere solche Paare asymptotisch transformierter Kurven gekennzeichnet, die demselben linearen Komplex angehören. Auch die Regelfläche selbst, auf der die Kurven Asymptotenlinien sind, gehört diesem linearen Komplex an[4].

Die Ergebnisse des vorhergehenden Abschnittes führen dann auf die folgenden Aussagen für den projektiven dreidimensionalen Raum:

[4] Man spricht kurz von einer „Komplexregelfläche".

Mit einem Paar asymptotisch transformierter Kurven ist an jeder Stelle projektivinvariant ein Paar asymptotisch transformierter Kurven verbunden, die dem gleichen linearen Komplex angehören. Die Kurven beider Paare berühren sich geradengeometrisch in dritter Ordnung. Entlang dem Ausgangspaar sind die Paare von Komplexkurven[5] *projektiv aufeinander abgebildet durch die Bahnkurven der projektiven Bewegung, die zu* (2,6) *gehört. Die Bahnkurven vermitteln auch eine Zuordnung zu den Punkten des Ausgangspaares und zwar der Eigenschaft, daß die Invarianten* $\mathbf{a}, \alpha_1, \alpha_2$ *in zusammen gehörenden Punkten übereinstimmen, während* $\alpha_0 = 0$ *ist für die zugeordneten Paare in einem linearen Komplex.*

Zwei asymptotisch transformierte Kurven sind (nach Definition dieses Begriffs) Asymptotenlinien der durch sie erzeugten Regelfläche. Deshalb folgt auch: *Unter Auszeichnung von zwei Asymptotenlinien ist an jeder Stelle einer Regelfläche eine Komplexregelfläche projektivinvariant festgelegt. Zu den ausgezeichneten Asymptotenlinien gehören die Komplexkurven der Komplexregelfläche.*

Entlang der Ausgangsregelfläche gibt es so eine einparametrige Schar von Komplexregelflächen, d. h. also eine Geradenkongruenz. In dieser zweiparametrigen Geradenmannigfaltigkeit sind an jeder Stelle zwei Fortschreitungsrichtungen ausgezeichnet, einmal die Richtung, die zu den einzelnen Komplexregelflächen gehört, zum anderen die Richtung der Bahnkurven der Bewegung (2,6).

Die Geradenkongruenz bildet sich im Geradenraum ab auf die Fläche [man vgl. (2,8)]

$$\hat{\mathfrak{x}}(t,s) = \beta_0(s)\,\mathfrak{e}_0(t) + \beta_1(s)\,\mathfrak{e}_1(t) + \beta_2(s)\,\mathfrak{e}_2(t) + \beta_3(s)\,\mathfrak{e}_3(t) + \beta_4(s)\,\mathfrak{e}_4(t). \qquad (3,1)$$

Die Parameterkurven $t = \text{const}$ haben die Komplexregelflächen zu Urbildern. Die Parameterkurven $s = \text{const}$ sind die Bahnkurven in der Bewegung.

Jede der beiden Komplexkurven der Komplexregelfläche des R_3 erzeugt in der Bewegung eine Fläche. Welche Bedeutung haben diese durch die Komplexkurven erzeugten Flächen in Bezug auf die Geradenkongruenz? Welche Bedeutung hat ferner das ausgezeichnete Richtungsnetz in der Geradenkongruenz?

Wir werden zeigen: *Die Komplexkurven sind Asymptotenlinien der durch sie erzeugten Fläche.* Da die Schmiegebene an die Komplexkurve

[5] „Komplexkurven" nennt man die Kurven, deren Tangenten in einem linearen Geradenkomplex liegen.

dann Tangentenebene an die Fläche ist, so liegt die Kongruenzgerade in den Tangentenebenen dieser Flächen. *Die von den Komplexkurven erzeugten Flächen sind also die Brennflächen der Kongruenz.* Die Bahnkurven in der Bewegung erzeugen — so werden wir sehen — die zweite Schar von Asymptotenlinien der Brennflächen. Dann folgt: *Die Geradenkongruenz ist ein W-Strahlsystem.* Denn die Asymptotenlinien auf den Brennflächen entsprechen sich. Daraus ergibt sich weiter, daß die Torsallinien der Geradenkongruenz die ausgezeichneten Richtungen in der Geradenkongruenz harmonisch trennen. Hierin liegt dann auch eine geometrische Deutung der Bahnkurven der Bewegung (2,6).

Es bleibt also nur zu beweisen, daß die Asymptotenlinien der von den Komplexkurven erzeugten Flächen aus diesen Komplexkurven selbst und aus den Bahnkurven der projektiven Bewegung bestehen. Es genügt hierfür zu zeigen, daß das Geradenbüschel in der Schmiegebene einer Bahnkurve zusammenfällt mit dem Geradenbüschel in der Schmiegebene der Komplexkurve. Letzteres hat als Bild im Geradenraum die Punkte auf der Geraden

$$(\hat{\mathfrak{z}}_i, \hat{\mathfrak{x}}), \qquad i = 1, 2, \tag{3,2}$$

wobei $\hat{\mathfrak{x}}$ in (1) und $\hat{\mathfrak{z}}_i$ durch

$$\hat{\mathfrak{z}}_i(t,s) = z_0^i(s)\,\mathfrak{e}_0(t) + z_1^i(s)\,\mathfrak{e}_1(t) + z_2^i(s)\,\mathfrak{e}_2(t) + z_3^i(s)\,\mathfrak{e}_3(t) + z_4^i(s)\,\mathfrak{e}_4(t), \; i = 1, 2 \tag{3,3}$$

gegeben ist.

Wir haben zu zeigen, daß für geeignete λ_i

$$[\hat{\mathfrak{z}}_i + \lambda_i\,\hat{\mathfrak{x}}]_t \equiv 0 \pmod{\hat{\mathfrak{z}}_i, \hat{\mathfrak{x}}}, \qquad i = 1, 2 \tag{3,4}$$

gilt. Dies folgt aber unmittelbar aus den Definitionsgleichungen der Bewegung (2,6), wonach

$$[\hat{\mathfrak{z}}_i]_t = \varrho_i\,\mathfrak{e}_5, \quad \hat{\mathfrak{x}}_t = \varrho\,\mathfrak{e}_5 \tag{3,5}$$

gilt. Damit ist aber alles bewiesen.

Wir fassen zusammen: *Mit einer Regelfläche ist unter Auszeichnung zweier ihrer Asymptotenlinien an jeder Stelle eine Komplexregelfläche, d. h. eine Geradenkongruenz projektivinvariant verbunden. Die Brennflächen dieser Geradenkongruenz werden erzeugt von den beiden Komplexkurven, die es unter den Asymptotenlinien jeder der Komplexregelflächen gibt und die in dem zu der Komplexregelfläche gehörenden linearen Komplex liegen. Die Komplexkurven sind Asymptotenlinien der von ihnen erzeugten*

Fläche; die Brennflächen sind also Komplexflächen. Die Geradenkongruenz ist ein W-Strahlsystem.

Die einparametrige Schar von Komplexregelflächen, die die Geradenkongruenz erzeugen, sind projektiv aufeinander abgebildet und vermitteln dadurch eine geradenweise Zuordnung der Ausgangsregelfläche zu den Komplexregelflächen, wobei die Komplexkurven den ausgezeichneten Asymptotenlinien der Ausgangsregelfläche zugeordnet sind. Diese Abbildung geschieht durch die Richtungsschar in der Geradenkongruenz, die die Komplexregelflächen von den Torsallinien harmonisch trennt. Diese Abbildung wird also auch dadurch bewirkt, daß man längs zweier zusammengehörender Asymptotenlinien der Brennflächen fortschreitet, die nicht Komplexkurven sind.

Bei dieser Abbildung der Regelfläche auf die Komplexregelfläche unter Beachtung der ausgezeichneten Asymptotenlinien entsprechen sich die Invarianten $\mathfrak{a}$, α_1, α_2, *während für die Komplexregelflächen* $\alpha_0 = 0$ *ist.*

Die Ausgangsregelfläche ist eine singuläre Geradenschar in der zugeordneten Kongruenz. Sie wird von den Komplexregelflächen eingehüllt und zwar derart, daß Ausgangsregelfläche und Komplexregelfläche sich geradengeometrisch in zweiter Ordnung berühren. Bei der Abbildung entsprechen sich also nicht nur die ausgezeichneten, sondern alle Asymptotenlinien dieser Regelflächen.

Die ausgezeichneten Asymptotenlinien der Ausgangsregelfläche sind singuläre Kurven auf den Brennflächen der Kongruenz. Die Komplexkurven, die ja Asymptotenlinien dieser Brennflächen sind, hüllen die ausgezeichneten Kurven der Ausgangsregelfläche ein, und zwar so, daß Komplexkurve und Ausgangskurve sich in einem Berührpunkt geradengeometrisch in dritter Ordnung berühren.

4. Bemerkungen zur Theorie der Regelflächen

a) Den direkten analytischen Zusammenhang zwischen den beiden Asymptotenlinien $\mathfrak{q}_1(t), \mathfrak{q}_2(t)$ einer Regelfläche $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ des dreidimensionalen projektiven Raumes und der betrachteten Figur auf der absoluten Quadrik des *Klein*schen Geradenraumes gewinnt man auf folgende Weise:

Bei geeigneter Normierung der Vektoren $\mathfrak{q}_1(t)$, $\mathfrak{q}_2(t)$ gelten im R_3 die Ableitungsgleichungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}_1'' &= \alpha_{11}\,\mathfrak{q}_1 + \alpha_{12}\,\mathfrak{q}_2, \\ \mathfrak{q}_2'' &= \alpha_{21}\,\mathfrak{q}_1 + \alpha_{22}\,\mathfrak{q}_2. \end{aligned} \tag{4,1}$$

Setzt man dann

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}_0 &= (\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2') - (\mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2), & \alpha_0 &= \alpha_{22} - \alpha_{11}, \\ \mathfrak{d}_1 &= \sqrt{2}(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_1'), & \alpha_1 &= \sqrt{2}\,\alpha_{12} \\ \mathfrak{d}_2 &= \sqrt{2}(\mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_2'), & \alpha_2 &= -\sqrt{2}\,\alpha_{21}, \\ \mathfrak{x} &= (\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2), & \mathfrak{a} &= \alpha_{11} + \alpha_{22}, \end{aligned} \tag{4,2}$$

so folgen aus (1) die Gleichungen (1,12) des Textes mit $\varepsilon = -1$.

b) Eine projektive Bewegung einer Ebene der Dimension k eines projektiven R_n der Eigenschaft, daß die Tangenten an die Bahnkurven der Punkte dieser Ebene alle durch denselben Punkt gehen, wollen wir *Zentralbewegung* nennen.

*Mit einer Regelfläche des projektiven R_3 ist im Klein*schen *Geradenraum eine Zentralbewegung einer Ebene der Dimension zwei invariant verbunden.* Für irgendeinen Punkt

$$\mathfrak{q} = q_0\,\mathfrak{d}_0 + q_1\,\mathfrak{d}_1 + q_2\,\mathfrak{d}_2, \quad q_j = \text{const} \tag{4,3}$$

der Ebene $(\mathfrak{d}_0, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2)$ gilt nämlich nach (1,12)

$$\mathfrak{q}' = (\varepsilon\, q_0\, \alpha_0 + q_1\, \alpha_1 + q_2\, \alpha_2)\,\mathfrak{x}. \tag{4,4}$$

Die Bahnkurven auf der Quadrik in dieser Zentralbewegung sind gerade die Bildkurven der Asymptotenlinien der Regelfläche des $\mathbf{R}_3$.

Die Ebene $(\mathfrak{d}_0, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2)$ ist total polar zu der Schmiegebene $(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}', \mathfrak{x}'')$ der Bildkurve $\mathfrak{x}(t)$ der Regelfläche und ist hierdurch also vollkommen festgelegt. Diese beiden zueinander polaren Ebenen der Dimension zwei schneiden aus der absoluten Quadrik zwei Kegelschnitte aus, die die beiden Geradenscharen einer Quadrik, der *Schmiegquadrik* der Regelfläche, repräsentieren. $(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}', \mathfrak{x}'')$ bestimmt das Bild der *konkordanten Schar*, der die Erzeugende selbst angehört, $(\mathfrak{d}_0, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2)$ kennzeichnet das Bild der *Transversalschar*, die aus den Tangenten an die Asymptotenlinien besteht.

Wir wollen hier andeuten, wie die Geometrie in der bewegten Ebene (3) mit der Theorie der Regelflächen und insbesondere mit der durch *G. Bol*[6] eingeführten hyperbolischen Abbildung zusammenhängt.

In der bewegten Ebene ist der Schnitt mit der absoluten Quadrik

[6] *G. Bol*, Zur projektiven Differentialgeometrie der Regelflächen. Math. Zeitschrift **52**, 791—809 (1950).

$$2\,q_1\,q_2 + \varepsilon\,q_0^2 = 0 \tag{4,5}$$

bzw.

$$\mathfrak{k} = 2\,s\,\mathfrak{z}_0 + 2\,\mathfrak{z}_1 - \varepsilon\,s^2\,\mathfrak{z}_2 \tag{4,6}$$

ein fester Kegelschnitt. In der bewegten Ebene ist also eine hyperbolische Geometrie durch den Kegelschnitt (5) definiert.

Zwei benachbarte Ebenen der bewegten Ebenenschar schneiden sich in einer Geraden, und zwar in (vgl. (4))

$$\varepsilon\,q_0\,\alpha_0 + q_1\,\alpha_1 + q_2\,\alpha_2 = 0. \tag{4,7}$$

Es ist dies die polare Gerade des Schmiegraumes der Dimension drei des Bildes $\mathfrak{x}(t)$ der Regelfläche.

Diese Gerade (7) schneidet aus dem absoluten Kegelschnitt für jedes t zwei Punkte aus, denen im R_3 die Schmiegtangenten durch die *Fleknodalpunkte* entsprechen. Entlang der Regelfläche definieren diese Schmiegtangenten die *Fleknodaltransformierten* (Regelflächen) der Ausgangsregelfläche.

Der Kehlpunkt der ausgezeichneten Ebenenschar ist polar zu fünf aufeinanderfolgenden Punkten $\mathfrak{x}(t)$; er kennzeichnet den *Schmiegkomplex* der Regelfläche. Die polare Gerade dieses Punktes in der bewegten Ebene schneidet für jedes t zwei Punkte aus dem absoluten Kegelschnitt aus, denen die Schmiegtangenten durch die *Komplexstellen* auf der betrachteten Erzeugenden entsprechen.

Ist der Kehlpunkt raumfest [dies bedeutet, daß die Regelfläche in einem linearen Komplex liegt], so ist dieser Punkt der Ebenenschar auch fest im bewegten System. [Liegt der Punkt auf dem absoluten Kegelschnitt, so ist der Komplex ausgeartet — man wird das bewegte Bezugssystem so wählen, daß etwa $\mathfrak{z}_1$ der feste Punkt des Kegelschnittes ist.] Liegt der feste Punkt nicht auf dem Kegelschnitt, so kann man ihn mit $\mathfrak{z}_0$ zusammenfallen lassen. Es gilt dann (1,17) und die Urbilder von $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$ sind Komplexkurven unter den Asymptotenlinien [sie brauchen nicht reell zu sein]. Darin ist die Aussage enthalten, die wir benützt haben, daß nämlich *eine Regelfläche, die einem nichtentarteten linearen Komplex angehört, zwei Komplexkurven dieses Komplexes als Asymptotenlinien besitzt.*

Der Schnitt zweier benachbarter Ebenen, also die Gerade (7), kennzeichnet die Schmiegkongruenz und die Fleknodalpunkte der Regelfläche. In der hyperbolischen (der bewegten) Ebene wird diese Gerade

auch repräsentiert durch den dazu polaren Punkt bezüglich des absoluten Kegelschnittes, also durch den Punkt

$$\mathring{\mathfrak{z}} = \alpha_0\, \mathfrak{z}_0 + \alpha_2\, \mathfrak{z}_1 + \alpha_1\, \mathfrak{z}_2. \tag{4,8}$$

Der Punkt $\mathring{\mathfrak{z}}$ beschreibt in der bewegten Ebene eine Kurve, die man das *hyperbolische Bild der Fleknodalkurven* nennt.

Im Sinne der hyperbolischen Geometrie kann man durch

$$< \mathring{\mathfrak{z}}, \mathring{\mathfrak{z}} > = 2\, \alpha_1\, \alpha_2 + \varepsilon\, \alpha^2 = \pm 1 \tag{4,9}$$

den Vektor $\mathring{\mathfrak{z}}$ normieren. Dies bedeutet für die Ausgangsfigur die Einführung eines invarianten Parameters [vgl. (1,16)]. Man spricht von der *Wilczynski*schen Bogenlänge der Regelfläche. Dann gilt: *Die hyperbolische Bogenlänge und die hyherbolische Krümmung der Kurve* $\mathring{\mathfrak{z}}(t)$ *in Abhängigkeit von dem invarianten Parameter* (9) *kennzeichnen die Regelfläche des* R_3 *mit dem geradengeometrischen Bild* $\mathfrak{x}(t)$ *bis auf Projektivabwicklung*[7].

Ist $\mathring{\mathfrak{z}}(t)$ fest, so gehört die Regelfläche einer linearen Kongruenz an; durchläuft $\mathring{\mathfrak{z}}(t)$ eine Gerade, so liegt eine Komplexregelfläche vor. Beschreibt $\mathring{\mathfrak{z}}(t)$ einen hyperbolischen Kreis, so nennt *G. Bol* die Regelfläche Kreisregelfläche. Ist $\mathring{\mathfrak{z}}(t) = 0$, d. h. die ausgezeichnete Ebene fest, so bildet die Regelfläche die Geradenschar einer Quadrik, deren Bild durch $(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}', \mathfrak{x}'')$ gegeben ist.

c) Es sollen hier einige Aussagen über geschlossene Regelflächen folgen. Es sei also die Bildkurve $\mathfrak{x}(t)$ des $\mathbf{R}_5$ eine geschlossene Kurve. Dann ist auch die Ebenenschar $(\mathfrak{z}_0, \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2)$ geschlossen. Im allgemeinen sind dann drei der Bahnkurven in der Bewegung dieser Ebene geschlossen. Denken wir uns nämlich die Ebene nach einem Durchlauf der Bewegung in ihre Ausgangslage zurückgekehrt, so entsprechen sich zusammengehörende Punkte in einer hyperbolischen Abbildung der Ebene. Zu dem Fixpunkt dieser Abbildung und den beiden Punkten des absoluten Kegelschnittes, die von der polaren Geraden des Fixpunktes ausgeschnitten werden, gehören geschlossene Bahnkurven. Den beiden Kurven auf der absoluten Quadrik entsprechen im R_3 geschlossene Asymptotenlinien der Regelfläche. Diese sind nicht immer reell. Ist

[7] Hier ist der Begriff „Projektivabwicklung" im Sinne der allgemeinen Flächentheorie benützt. Man vgl. etwa *G. Bol*, Projektive Differentialgeometrie. 2. Teil, Göttingen 1954, § 84.

eine weitere Bahnkurve geschlossen, so sind alle Bahnkurven der Bewegung geschlossen; es liegt eine *geschlossene projektive Bewegung* vor.

Wir betrachten nun geschlossene Regelflächen mit gewissen Konvexitätseigenschaften. Regelflächen des Typs A: Es gibt einen linearen Komplex, dem keine Erzeugende der Regelfläche angehört. Regelflächen des Typs B: Zu je zwei Erzeugenden gibt es einen linearen Komplex, dem diese aber keine weiteren Erzeugenden der Regelfläche angehören. Regelflächen des Typs C: Zu je vier Erzeugenden gibt es einen linearen Komplex, dem diese aber keine weiteren Erzeugenden der Regelfläche angehören.

Die festen Punkte der bewegten Ebene $(\mathfrak{d}_0, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2)$ (die nicht auf $\mathfrak{Q}$ liegen) beschreiben in der Bewegung Bahnkurven, zu denen solche Scharen linearer Komplexe gehören, die an jeder Stelle drei aufeinanderfolgende Geraden der Regelfläche (und damit also die konkordanten Geraden der Schmiegquadrik) und die Tangenten an zwei bestimmte Asymptotenlinien der anderen Schar enthalten. Unter diesen, mit einer Regelfläche verknüpften Komplexscharen, gibt es im allgemeinen eine reelle, geschlossene. Sie gehört zu dem Fixpunkt der hyperbolischen Abbildung, die wir oben betrachtet haben.

Es gilt[8]: *Die (sich schließende) Schar der linearen Komplexe, die an jeder Stelle der Regelfläche außer den konkordanten Geraden der Schmiegquadrik noch die Schmiegtangenten an die beiden geschlossenen Asymptotenlinien enthält, besitzt mindestens zwei, vier bzw. sechs Stationaritätsstellen, je nachdem ob die Regelfläche vom Typ A, vom Typ A und B bzw. vom Typ A, B und C ist.*

Man beweist dies nach dem *Herglotz*schen Verfahren, indem man die Ableitungsgleichung (1,12) skalar mit einem konstanten Vektor $\mathfrak{c}$ multipliziert und integriert. Es folgt dann die Integralformel

$$<\mathfrak{c}, \mathfrak{d}_0>\Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} a_0 <\mathfrak{c}, \mathfrak{x}> dt, \tag{4,10}$$

deren linke Seite bei einem vollen Umlauf verschwindet. Aus dem Ver-

[8] Um auf zwei weitere Stationaritätsstellen schließen zu können, benötigt man nur einen linearen Komplex, der *die* Erzeugenden der Regelfläche (aber keine weiteren) enthält, die zu den Stationaritätsstellen gehören, deren Existenz bereits bekannt ist.

Ist aber die Regelfläche sogar vom Typ C (oder B) (d. h., gibt es durch *je* vier (bzw. zwei) Erzeugende einen linearen Komplex, der keine weitere Erzeugende der Regelfläche enthält), so ist sie aus Stetigkeitsgründen auch vom Typ B und A (bzw. A). Man lasse zum Beweis die vier bzw. zwei betrachteten Erzeugenden paarweise in eine bzw. in eine Erzeugende zusammenrücken.

schwinden des Integrals schließt man auf mindestens zwei (bzw. vier bzw. sechs) Nullstellen von a_0, da bei geeigneter Wahl von $\mathfrak{c}$ die Funktion $< \mathfrak{c}, \mathfrak{x} >$ nur positive (oder nur negative) Werte annimmt. Diese mögliche Wahl des Vektors $\mathfrak{c}$ sichern die Voraussetzungen.

Auf einer geschlossenen Komplexregelfläche sind die Komplexkurven unter den Asymptotenlinien notwendig geschlossen. Hier ist natürlich jede Stelle Stationaritätsstelle der zugehörigen Komplexschar (die aus einem festen linearen Komplex besteht) und die Aussage entfällt.

Auf einer Regelfläche in einer linearen Kongruenz wird es im allgemeinen außer den beiden Leitgeraden keine weitere geschlossene Asymptotenlinie geben. Trotzdem folgen hier ans unserem Satz unmittelbar Aussagen über die Mindestanzahl der Stellen, in denen eine (und damit alle) Asymptotenlinien einen Wendepunkt besitzen. Es sind dies die Stellen stationärer Schmiegquadrik. Denn da die bewegte Ebene sich um eine feste Gerade „dreht", ist mit einem ihrer Punkte auch jeder andere und damit die Ebene selbst, die die Schmiegquadrik des R_3 repräsentiert, stationär.

Hier gilt nun ein dem klassischen Vierscheitelsatz äquivalenter Satz: *Eine konvexe geschlossene Kongruenzregelfläche besitzt mindestens vier Stellen stationärer Schmiegquadrik.* Dabei soll eine geschlossene Regelfläche des R_3 *konvex* heißen, wenn je zwei Erzeugende eine Treffgerade besitzen, die die Regelfläche sonst nicht trifft.

Zum Beweis beachte man zunächst, daß die Geraden des R_3, die außer in der ausgezeichneten linearen Kongruenz auch noch in einem linearen Komplex liegen, der die Kongruenz nicht enthält, die Geradenschar einer Quadrik durch die Leitlinien der Kongruenz bilden. Die Kongruenzregelfläche ist dann vom Typ A bzw. B, falls es eine Geradenschar einer Quadrik durch die Leitlinien gibt, die keine Erzeugende bzw. genau zwei vorgegebene Erzeugende mit der Regelfläche gemeinsam hat. Existiert eine solche Geradenschar einer Quadrik, so trifft eine von den Leitlinien der Kongruenz verschiedene Transversalgerade die Ausgangsregelfläche nicht bzw. in genau zwei ihrer Erzeugenden. Hat man umgekehrt eine Gerade, die die Regelfläche nicht bzw. in genau zwei ihrer Erzeugenden trifft, so bilden die Transversalen dieser Geraden und der beiden Leitlinien der Kongruenz die Geradenschar einer Quadrik, die keine bzw. genau die beiden Erzeugenden gemeinsam haben. Damit

ist gezeigt, daß eine konvexe geschlossene Kongruenzregelfläche vom Typ B ist. Daß sie dann auch vom Typ A ist, folgt aus Stetigkeitsgründen: Zu einer, die Regelfläche tangierenden Geraden, die die Regelfläche sonst nicht trifft, gibt es eine Nachbargerade, die die Regelfläche nicht schneidet.

Die Stationaritätsstellen der Schmiegquadrik werden in unserem Fall durch die Nullstellen von α_0 angezeigt. Unser Vierscheitelsatz ist also durch die Integralformel (10) bewiesen.

Mit weiterreichenden Methoden[9] kann man hier die Voraussetzungen des Satzes noch abschwächen. So genügt es zum Beispiel die Konvexitätseigenschaft für Nachbarerzeugende zu verlangen. Für Kongruenzregelflächen mit nicht reellen Leitlinien gilt sogar: *Eine geschlossene Kongruenzregelfläche mit nicht reellen Leitlinien besitzt immer mindestens vier Stellen stationärer Schmiegquadrik.* Ferner gilt allgemein: *Wird eine konvexe, geschlossene Kongruenzregelfläche von einer Geraden in $2k$ Punkten getroffen, so besitzt die Regelfläche mindestens $2k$ Stellen stationärer Schmiegquadrik.*

Aus den beiden letzten Ableitungsgleichungen (1,12) folgen ebenfalls Integralformeln, zum Beispiel

$$< \mathfrak{c}, \mathfrak{z}_1 > |_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \alpha_1 < \mathfrak{c}, \mathfrak{x} > dt, \tag{4,11}$$

mit deren Hilfe man zu Aussagen über die Mindestanzahl der Wendepunkte einer geschlossenen Asymptotenlinie einer geschlossenen Regelfläche gelangen kann. Hier verschwindet jedoch die linke Seite (bei beliebiger Wahl von $\mathfrak{c}$) bei einem vollen Umlauf dann und nur dann, falls *alle* Asymptotenlinien der Regelfläche geschlossen sind. Denn nur und genau in diesem Fall, läßt sich der Normierungsfaktor des Vektors $\mathfrak{z}_1$ periodisch einrichten.

Somit gilt: *Sind die Asymptotenlinien einer Regelfläche des Typs A bzw. B bzw. C geschlossen, so besitzt jede Asymptotenlinie mindestens zwei bzw. vier bzw. sechs Wendepunkte.*

Man kann jedoch aus der Integralformel (11) auch in dem allgemeinen Fall, daß $\mathfrak{z}_1$ geschlossene Asymptotenlinie einer geschlossenen Regel-

[9] *M. Barner*, Über die Mindestanzahl der Stellen stationärer Schmiegebene bei streng-konvexen Raumkurven. Abh. aus dem math. Sem. der Hamb. Univ. (1955).

fläche ist (die anderen Asymptotenlinien aber nicht notwendig geschlossen sind), Aussagen über die Mindestanzahl ihrer Wendepunkte gewinnen. Hierzu muß man den zu $\mathfrak{c}$ gehörenden linearen Komplex so einrichten, daß die Schmiegtangente der Stelle t_1 (und damit nach einem Umlauf der Stelle t_2) dem linearen Komplex angehört.

So folgt: *Gibt es einen linearen Komplex, dem eine Schmiegtangente einer geschlossenen Asymptotenlinie aber keine Erzeugende der geschlossenen Regelfläche angehört, so besitzt die Asymptotenlinie mindestens zwei Wendepunkte. Gibt es ferner durch je zwei Erzeugende der Regelfläche einen linearen Komplex, dem eine der beiden zugehörenden Schmiegtangenten der geschlossenen Asymptotenlinie, aber keine weitere Erzeugende der Regelfläche angehört, so besitzt die Asymptotenlinie sogar mindestens vier Wendepunkte.* Entsprechend kann man eventuell auf mindestens sechs Wendepunkte der geschlossenen Asymptotenlinie schließen.

d) Die Theorie der Kurven, die mit ihren Tangenten auf einer Quadrik des $\mathbf{R}_5$ liegen, wird beherrscht von den Ableitungsgleichungen[10]

$$\begin{aligned}
\mathfrak{x}_0' &= \mathfrak{x}_1, \\
\mathfrak{x}_1' &= \mathfrak{x}_2 + 2a\,\mathfrak{x}_0, \\
\mathfrak{x}_2' &= \mathfrak{x}_3 + 3a\,\mathfrak{x}_1, \\
\mathfrak{x}_3' &= \mathfrak{x}_4 + 3a\,\mathfrak{x}_2 + c\,\mathfrak{x}_0, \\
\mathfrak{x}_4' &= b\,\mathfrak{x}_5 + 2a\,\mathfrak{x}_3 + c\,\mathfrak{x}_1, \\
\mathfrak{x}_5' &= -\varepsilon\, b\,\mathfrak{x}_0.
\end{aligned} \tag{4,12}$$

Ihnen entsprechen im Sinne der Geradengeometrie ($\varepsilon = -1$) die Torsen des projektiven dreidimensionalen Raumes. Eine Asymptotenlinie einer Regelfläche — z. B. das Urbild von $\mathfrak{z}_1$ — ist eine solche Torse; die Tangente der Kurve $\mathfrak{z}_1(t)$ des $\mathbf{R}_5$ liegt auf der absoluten Quadrik. Wir wollen die Invarianten a, b, c der Kurve $\mathfrak{z}_1(t)$ ausdrücken mittels der Invarianten $\mathfrak{a}$, α_0, α_1, α_2, die das Kurvenpaar $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$ bestimmen.

Die Normierung des Vektors $\mathfrak{x}_0$ in (12) ist durch $< \mathfrak{x}_0'', \mathfrak{x}_0'' > = \text{const}$ festgelegt. Wir setzen deshalb

$$< \mathfrak{z}_1'', \mathfrak{z}_1'' > = \alpha_1^2 \varkappa = \text{const}, \tag{4,13}$$

wodurch eine bestimmte invariante Parameterverteilung in dem Kurvenpaar eingeführt ist.

Dann wird

[10] Vgl. die in Fußnote 1, S. 21. zitierte Arbeit.

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{z}_1 &= \mathfrak{x}_0,\\
\alpha_1 \mathfrak{x} &= \mathfrak{x}_1,\\
\alpha_1 \mathfrak{t} &= \mathfrak{x}_2 + 2a\,\mathfrak{x}_0,\\
\alpha_1 \mathfrak{y} &= \mathfrak{x}_3 + (5a - \mathfrak{a})\,\mathfrak{x}_1 + 2a'\,\mathfrak{x}_0,\\
\alpha_1(\alpha_1 \mathfrak{z}_2 + \alpha_0 \mathfrak{z}_0) &= \mathfrak{x}_4 + (8a - 2\mathfrak{a})\,\mathfrak{x}_2 + (7a' - \mathfrak{a}')\,\mathfrak{x}_1 + (c - \alpha_1\alpha_2 + \Phi_0)\,\mathfrak{x}_0,\\
\alpha_1 \alpha_0'\, \mathfrak{z}_0 &= b\,\mathfrak{x}_5 + (10a - 2\mathfrak{a})\,\mathfrak{x}_3 + (15a' - 3\mathfrak{a}')\,\mathfrak{x}_2 +\\
&\quad + (2c - 2\alpha_1\alpha_2 - \varepsilon\alpha_0^2 + \Phi_1)\,\mathfrak{x}_1 + \Psi_0\,\mathfrak{x}_0,\\
\alpha_1 \alpha_0''\, \mathfrak{z}_0 &= b'\,\mathfrak{x}_5 + (10a - 2\mathfrak{a})\,\mathfrak{x}_4 + (25a' - 5\mathfrak{a}')\,\mathfrak{x}_3 +\\
&\quad + (2c - 2\alpha_1\alpha_2 - \varepsilon\alpha_0^2 + \Phi_2)\,\mathfrak{x}_2 + \Psi_1\,\mathfrak{x}_1 + A\,\mathfrak{x}_0.
\end{aligned}
\tag{4,14}
$$

Hierin ist

$$
\begin{aligned}
\Psi_0 &= c' - \alpha_1'\,\alpha_2 - \alpha_1\,\alpha_2' + \Phi_3,\\
\Psi_1 &= 3c' - 3\alpha_1'\,\alpha_2 - 3\alpha_1\,\alpha_2' - 3\varepsilon\,\alpha_0\,\alpha_0' + \Phi_4,\\
A &= -\varepsilon b^2 + (10a - 2\mathfrak{a})\,c + 2a\,(2c - 2\alpha_1\,\alpha_2 - \varepsilon\,\alpha_0^2 + \Phi_1) + \Psi_0'
\end{aligned}
$$

gesetzt. Die Φ_i hängen nur von $\mathfrak{a}$, a und deren Ableitungen ab.

Der Vergleich der beiden letzten Gleichungen (14) führt wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_5$ zunächst auf die Beziehung zwischen den Invarianten:

$$
5a = \mathfrak{a} \tag{4,15a}
$$

Berücksichtigt man dies, so ergibt sich für die Φ_i:

$$
\begin{aligned}
\Phi_0 &= -10a^2 + 2a'',\\
\Phi_1 = \Phi_2 &= -16a^2 + 4a'',\\
3\Phi_3 = \Phi_4 &= -48a\,a' + 6a'''.
\end{aligned}
$$

Damit folgt dann weiter aus (14):

$$
\begin{aligned}
b^2 &= \alpha_0'^{\,2},\\
2c &= 2\alpha_1\,\alpha_2 + \varepsilon\,\alpha_0^2 - \Phi_2,\\
3c' &= 3\alpha_1'\,\alpha_2 + 3\alpha_1\,\alpha_2' + 3\varepsilon\,\alpha_0\,\alpha_0' - \Phi_4.
\end{aligned}
\tag{4,15b}
$$

Uns kommt es hier auf den Zusammenhang zwischen der Kurve $\mathfrak{z}_1(t)$ und der in der Abwicklung zugehörigen hyperebenen Kurve $\mathfrak{z}_1(t)$ des bewegten Systems an. Nach (2,15) folgen mittels (15) die einfachen Beziehungen:

$$
\begin{aligned}
\overset{\circ}{a} &= a,\\
\overset{\circ}{b} &= 0,\\
c - \overset{\circ}{c} &= \varepsilon\,\alpha_0^2.
\end{aligned}
\tag{4,16}
$$

Es folgt:[11] *Gibt man eine Komplexregelfläche des bewegten Systems vor, so gibt es hierzu genau zwei Bewegungen* (2,6) *und damit genau zwei Regelflächen des festen Systems, so daß eine der Komplexkurven der Komplexregelfläche in eine beliebig vorgegebene Raumkurve übergeht. Die Abwicklung ist nur bei Parameterverteilungen möglich, bei denen die Invariante a der Raumkurve und der Komplexkurve übereinstimmen.* Sollen die auftretenden Gebilde reell sein, so muß man

$$c - \mathring{c} < 0$$

voraussetzen. [Für die Geradengeometrie ist $\varepsilon = -1$. In der *Lie*-Geometrie der Krümmungsstreifen ($\varepsilon = 1$) muß man dagegen $c - \mathring{c} > 0$ fordern.]

5. Bemerkungen zur Abwicklung von Regelflächen

a) Wir haben uns bisher um eventuelle spezielle Eigenschaften der Ausgangsregelfläche nicht gekümmert. Hier wollen wir uns mit der Abwicklung von Komplex- und Kongruenzregelflächen beschäftigen und knüpfen somit an den Abschnitt 3 an.

Wir gehen von einer Komplexregelfläche aus. Wir können etwa annehmen, eine allgemeine Regelfläche sei bereits auf eine Komplexregelfläche längs zweier ausgezeichneter Asymptotenlinien abgewickelt worden. Wenn wir auf der Komplexregelfläche zwei Asymptotenlinien auszeichnen, unter denen keine Komplexkurve ist, so läßt sich die Abwicklung wiederholen. Die abgewickelte Regelfläche liegt dann in einer linearen Kongruenz; denn sie ist in zweifacher Weise Komplexregelfläche. Die Leitlinien der Kongruenz sind jenes Paar von Asymptotenlinien, das die beiden nacheinander ausgezeichneten Paare harmonisch trennt.

Nehmen wir nun an, eine der beiden Asymptotenlinien — etwa das Urbild von $\mathfrak{z}_1$ — sei Komplexkurve. Dann ist einer der festen Punkte in der bewegten Ebene [und zwar ein Punkt der Geraden $(\mathfrak{z}_0, \mathfrak{z}_1)$] fest. Es sei

$$\mathfrak{z}_0 + \lambda\, \mathfrak{z}_1, \qquad \lambda = \text{const} \neq 0 \tag{5,1}$$

dieser Punkt. Aus (1,12) folgt dann

$$\alpha_0 + \lambda\, \alpha_1 = 0. \tag{5,2}$$

[11] Dieses Ergebnis wurde in anderem Zusammenhang von *G. Bol* erzielt. Man vgl.: *G. Bol*, Projektive Differentialgeometrie. Teil 3 (im Erscheinen).

Nach der Abwicklung wäre die Gerade $(\overset{\circ}{\mathfrak{z}}_0, \overset{\circ}{\mathfrak{z}}_1)$ fest, d. h. es müßte $\overset{\circ}{\alpha}_0 = \overset{\circ}{\alpha}_1 = 0$ sein. Dies ist aber mit (2) und $\overset{\circ}{\alpha}_0 = \alpha_0$ nicht vereinbar. Die Abwicklung einer Regelfläche nach (2,6) über eine Komplexkurve unter den Asymptotenlinien ist also nicht möglich.

Trägt jedoch eine Regelfläche eine Transversalgerade, so kann man sie über diese Gerade und eine weitere Asymptotenlinie nach (2,6) abwickeln. *Mit einer Regelfläche in einem speziellen linearen Komplex ist unter Auszeichnung einer Asymptotenlinie ein W-Strahlsystem invariant verbunden, dessen eine Brennfläche in eine Gerade entartet, während die andere Brennfläche Komplexfläche ist.*

Insbesondere ist mit einer Kongruenzregelfläche mit nicht zusammenfallenden Leitlinien ein W-Strahlsystem invariant verknüpft, dessen Brennflächen in die beiden Leitlinien entarten. Dieses W-Strahlsystem besteht aus der einparametrigen Mannigfaltigkeit der konkordanten Geradenscharen der Schmiegquadriken der Regelfläche. Die Torsallinien der Kongruenz trennen dieses Richtungsfeld der Geradenscharen harmonisch von den Bahnkurven, wodurch letztere geometrisch gekennzeichnet sind. Die Bahnkurven bilden die einparametrige Schar der Schmiegquadriken aufeinander und diese auf die Ausgangsregelfläche ab, und zwar so, daß die Invariante

$$\mathbf{a} \tag{5,3}$$

bei dieser Abwicklung erhalten bleibt.

Durch eine dreimal hintereinander durchgeführte Abwicklung nach (2,6) *wird eine allgemeine Regelfläche auf die Geradenschar einer Quadrik abgebildet, und zwar so, daß die Invariante* $\mathbf{a}$ *erhalten bleibt.* Daraus folgt: *Die sogenannten Cartanschen Parameter, für die* $\mathbf{a} = 0$ *gilt, sind auf einer Regelfläche dadurch ausgezeichnet, daß ihnen bei der Abbildung der Regelfläche auf eine ihrer Schmiegquadriken ein gewöhnlicher projektiver Parameter in der Geradenschar der Quadrik entspricht.*

Nach einer dreimaligen Abwicklung einer Regelfläche nach (2,6) (zuerst über zwei beliebige Asymptotenlinien, dann über zwei Asymptotenlinien, die nicht Komplexkurven sind, dann über die beiden Transversalen) ist

$$\overset{\circ}{\alpha}_0 = \overset{\circ}{\alpha}_1 = \overset{\circ}{\alpha}_2 = 0.$$

Ist nun auf der Regelfläche ein *Cartan*scher Parameter eingeführt, also $\mathbf{a} = 0$, so wird

$$\overset{\circ}{\mathfrak{x}}''' = 0$$

und also

$$\overset{\circ}{\mathfrak{x}} = \overset{\circ}{\mathfrak{a}} + t\,\overset{\circ}{\mathfrak{b}} + t^2\,\overset{\circ}{\mathfrak{c}}$$

mit konstanten Vektoren $\overset{\circ}{\mathfrak{a}}$, $\overset{\circ}{\mathfrak{b}}$, $\overset{\circ}{\mathfrak{c}}$. Im projektoven dreidimensionalen Raum entspricht dies nach (4,2) der Darstellung

$$(\mathfrak{a}_1 + t\,\mathfrak{b}_1) + s(\mathfrak{a}_2 + t\,\mathfrak{b}_2)$$

der Geradenschar einer Quadrik. $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$ sind hier konstante Vierervektoren.

b) Die oben in a) schrittweise durchgeführte Abbildung einer Regelfläche auf eine Quadrik kann auch direkt geschehen. Diese Abbildung geht auf *E. Cartan*[12] zurück. Wir geben hier eine neue geometrische und analytische Interpretation und eine Weiterführung der *Cartan*schen Gedanken.

Hierzu betrachten wir, wie sich dies auf Grund der durchgeführten kinematisch-geometrischen Überlegungen sofort anbietet, die Bewegung der Ebene ($\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$) (diese Ebene bestimmt im Urbild die Schar der konkordanten Geraden der Schmiegquadrik) der Eigenschaft, daß die Tangenten an die Bahnkurven, die von Punkten dieser Ebene auslaufen, den polaren Punkt dieser Ebene in dem Schmiegraum der Dimension drei der Kurve $\mathfrak{x}(t)$ treffen. Dieser polare Punkt ist der Punkt $\mathfrak{z}$ in (4,8).

Durch diese Bewegung ist auch die Kongruenz mitbestimmt, die die konkordanten Geraden der Schmiegquadriken entlang der Regelfläche bilden, und die die Fleknodaltransformierten Regelflächen der Ausgangsfläche zu Brennflächen haben. Außer den Torsallinien sind in dieser Kongruenz zwei Richtungsfelder ausgezeichnet, das eine ist durch die Geradenscharen der Schmiegquadriken definiert, das andere ist hierzu harmonisch bezüglich der Torsallinien der Kongruenz. Letzteres definiert die Bahnkurven in der ausgezeichneten Bewegung.

Betrachten wir diese Bewegung analytisch. Die Basis möge der Produkttabelle

	$\mathfrak{x}_0$	$\mathfrak{x}_1$	$\mathfrak{x}_2$
$\mathfrak{x}_0$	0	0	$-\varkappa$
$\mathfrak{x}_1$	0	$\varkappa$	0
$\mathfrak{x}_2$	$-\varkappa$	0	0

(5,4)

[12] *E. Cartan*, Sur les développantes d'une surface réglée. Bull. Sect. sci. Acad. roum. **14**, 167—174 (1931).

genügen und sei im übrigen so gewählt, daß jeder Punkt

$$\mathfrak{p} = p_0\,\mathfrak{x}_0 + p_1\,\mathfrak{x}_1 + p_2\,\mathfrak{x}_2, \qquad p_i = \text{const}$$

eine Bahnkurve in der Bewegung beschreibt. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_0' &= \beta_0\,\mathfrak{z}, \\ \mathfrak{x}_1' &= \beta_1\,\mathfrak{z}, \\ \mathfrak{x}_2' &= \beta_2\,\mathfrak{z}. \end{aligned} \tag{5,5}$$

Dieses System von Ableitungsgleichungen ist nach (1,12) zu ergänzen durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}_0' &= \varepsilon\,\alpha_0\,\mathfrak{x}, \\ \mathfrak{z}_1' &= \alpha_1\,\mathfrak{x}, \\ \mathfrak{z}_2' &= \alpha_2\,\mathfrak{x}. \end{aligned} \tag{5,6}$$

Hierdurch entsteht ein symmetrisches Formelsystem bezüglich der beiden zueinander total polaren Ebenen $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$ [dies ist die Ebene $(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}', \mathfrak{x}'')$] und $(\mathfrak{z}_0, \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2)$.

$\mathfrak{x}(t)$ besitzt jetzt die Darstellung

$$\mathfrak{x} = \beta_2\,\mathfrak{x}_0 - \beta_1\,\mathfrak{x}_1 + \beta_0\,\mathfrak{x}_2. \tag{5,7}$$

$\mathfrak{x}(t)$ ist ja der Kehlpunkt der Ebenenschar $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$. Da $\mathfrak{x}(t)$ für jedes t auf der absoluten Quadrik liegt, so folgt

$$< \mathfrak{x}, \mathfrak{x} > = (-2\,\beta_0\,\beta_2 + \beta_1^2)\,\varkappa = 0. \tag{5,8}$$

Die Normierungsbedingung (1,6) zieht

$$< \mathfrak{x}', \mathfrak{x}' > \frac{1}{\varkappa} = (-2\,\beta_0'\,\beta_2' + \beta_1'^2) = 1 \tag{5,9}$$

nach sich.

Betrachten wir nun $\mathfrak{x}(t)$ in seiner Bewegung nach (5) als eine Kurve des bewegten Systems und schreiben zur Unterscheidung $\overset{\circ}{\mathfrak{x}}(t)$. Dann gilt nach (5), (8) und (9)

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} &= \overset{\circ}{\mathfrak{x}}, \\ \mathfrak{x}' &= \overset{\circ}{\mathfrak{x}}', \\ \mathfrak{x}'' &= \overset{\circ}{\mathfrak{x}}'', \\ \mathfrak{x}''' &= \overset{\circ}{\mathfrak{x}}''' + (\beta_2''\,\beta_0 - \beta_1''\,\beta_1 + \beta_0''\,\beta_2)\,\mathfrak{z}, \\ &= \overset{\circ}{\mathfrak{x}}''' + \mathfrak{z}. \end{aligned} \tag{5,10}$$

Auch für $\overset{\circ}{\mathfrak{x}}(t)$ bestehen Ableitungsgleichungen des Typus (2,14), und zwar

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\mathfrak{x}}' &= \overset{\circ}{\mathfrak{t}}, \\ \overset{\circ}{\mathfrak{t}}' &= \overset{\circ}{\mathfrak{y}} + \overset{\circ}{\mathfrak{a}}\,\overset{\circ}{\mathfrak{x}}, \\ \overset{\circ}{\mathfrak{y}}' &= \overset{\circ}{\mathfrak{a}}\,\overset{\circ}{\mathfrak{t}} \end{aligned} \tag{5,11}$$

mit

$$\overset{\circ}{\alpha}_0 = \overset{\circ}{\alpha}_1 = \overset{\circ}{\alpha}_2 = 0.$$

Ferner ist nach (10) im Vergleich mit (1,7)

$$\overset{\circ}{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}. \tag{5,12}$$

Damit ist die Invarianz von $\mathfrak{a}$ bei dieser Abbildung der Regelfläche auf die Geradenschar einer Quadrik nachgewiesen.

Wir denken uns den festen Kegelschnitt der bewegten Ebene $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$ in beliebiger Weise durchlaufen. Es entsteht in der Bewegung eine Kurve auf der absoluten Quadrik. Bei einer geeigneten Parameterverteilung auf der Ausgangsregelfläche können wir immer erreichen, daß $\mathfrak{y}(t)$ diese Kurve durchläuft. Wir können also auch erreichen, daß $\mathfrak{y}(t)$ eine Bahnkurve beschreibt. Nach (1,12) ist dies genau dann der Fall, wenn

$$\mathfrak{a} = 0 \tag{5,13}$$

gilt, d. h. wenn der zugehörige Parameter ein *Cartan*scher Parameter ist.

Die Punkte des Kegelschnittes definieren in der Bewegung das geradengeometrische Bild der Kongruenz, die von den konkordanten Geraden der Schmiegquadrik längs der Regelfläche gebildet wird. Wann beschreibt $\mathfrak{y}(t)$ das Bild einer Torse der Kongruenz? Hierzu muß

$$< \mathfrak{y}', \mathfrak{y}' > = \varkappa(\mathfrak{a}^2 + 2\,\alpha_1\,\alpha_2 + \varepsilon\,\alpha_0^2) = 0 \tag{5,14}$$

sein. Damit ist aber gezeigt, daß die Bahnkurven der Bewegung ($\mathfrak{a} = 0$) die Torsallinien harmonisch von den Kurven $t = \text{const}$ ($\mathfrak{a} = \infty$) trennen. Dies ist ein anderer geometrischer Ausdruck für die nach *E. Cartan* bekannte Tatsache, daß das Urbild der Bahnkurven Regelflächen definieren, die die Schmiegquadriken involutorisch schneiden.

Wir fassen zusammen: *Die Bewegung* (5) *bildet die Ausgangsregelfläche unter Erhaltung der Invarianten* $\mathfrak{a}$ *auf eine feste Quadrik ab. In dieser Abbildung entsprechen also insbesondere den Cartan*schen *Parameter auf der Regelfläche die gewöhnlichen projektiven Parametern in der Geradenschar der Quadrik. Die Bahnkurven der Bewegung* (5) *und die Kurven*

$t = \text{const}$ *werden durch die Torsalrichtungen der definierten Kongruenz harmonisch getrennt.*

Man wird sinngemäß die Bahnkurven der Bewegung (5) die Evolventen der Ausgangskurve $\mathfrak{x}(t)$ nennen. Im R_3 durchläuft also (q_1', q_2') [vgl. 4a)] eine Evolvente der Ausgangsregelfläche, falls der zugrunde gelegte Parameter ein *Cartan*scher Parameter ist. Hierzu muß (13) gelten.

c) Um die Bedeutung der Invarianten $\mathfrak{a}$ in bezug auf die Parameterverteilung einer Regelfläche zu erfassen, genügt es an Hand der durchgeführten Abbildung die Bedeutung dieser Größe für die Parameterverteilung der Geradenschar einer Quadrik bzw. im Bildraum für die Parameterverteilung auf einem Kegelschnitt zu untersuchen. Diese Frage tritt nicht nur hier, sondern bei allen anderen einparametrigen Gebilden auf, die projektiver Natur sind. Dies ist natürlich in jedem Einzelfall durch entsprechende kinematische Überlegungen nachzuweisen.

Wir notieren kurz die wichtigsten Punkte über die Parameterverteilungen auf einem Kegelschnitt der projektiven Ebene und den Zusammenhang mit der durch ihn definierten hyperbolischen Geometrie. Wir gehen also aus von den Ableitungsgleichungen (11), die eine bestimmte Parameterverteilung auf einem festen Kegelschnitt kennzeichnen.

Ist $\mathfrak{x}(t)$ auf einen projektiven Parameter bezogen (und nur in diesem Fall), so ist $\mathfrak{a} = 0$ und $\mathfrak{y}$ ein fester Punkt des Kegelschnittes. $\mathfrak{t}$ durchläuft eine Gerade, die den Kegelschnitt (in $\mathfrak{y}$) berührt.

Weiterhin ist der Zusammenhang der von $\mathfrak{t}$ beschriebenen Kurve mit der Parameterverteilung und also mit der Invarianten $\mathfrak{a}$ zu verfolgen. $\mathfrak{t}$ durchläuft eine Gerade, die den absoluten Kegelschnitt nicht berührt, wenn

$$\mathfrak{a} = \text{const} \neq 0$$

ist.

Durchläuft $\mathfrak{t}$ keine Gerade, so können wir die hyperbolische Bogenlänge und die Krümmung dieser Kurve berechnen. Zu $\mathfrak{t}$ gehört das bewegte Polardreieck

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_0 &= \mathring{\mathfrak{t}}, \\ \mathfrak{a}_1 &= \frac{1}{\tau}(\mathring{\mathfrak{y}} + \mathring{\mathfrak{a}}\,\mathring{\mathfrak{x}}), \qquad \bar{\varepsilon}\,\tau^2 = 2\,\mathfrak{a}, \\ \mathfrak{a}_2 &= \frac{1}{\tau}(-\mathring{\mathfrak{y}} + \mathring{\mathfrak{a}}\,\mathring{\mathfrak{x}}), \end{aligned} \tag{5,15}$$

mit der Produkttabelle

	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_2$
$\mathfrak{a}_0$	$\varkappa$	0	0
$\mathfrak{a}_1$	0	$-\bar{\varepsilon}\,\varkappa$	0
$\mathfrak{a}_2$	0	0	$\bar{\varepsilon}\,\varkappa$.

(5,16)

Diese Vektoren genügen den Ableitungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_0' &= \tau\,\mathfrak{a}_1, \\ \mathfrak{a}_1' &= \bar{\varepsilon}\,\tau\,\mathfrak{a}_0 + (\log\tau)'\,\mathfrak{a}_2, \\ \mathfrak{a}_2' &= \bar{\varepsilon}(\log\tau)'\,\mathfrak{a}_1. \end{aligned} \tag{5,17}$$

Man findet hieraus für die hyperbolische Bogenlänge $\tilde{t}$ der Kurve $\mathring{\mathfrak{t}}(t)$

$$\left(\frac{d\tilde{t}}{dt}\right)^2 = 2\,\bar{\varepsilon}\,\mathfrak{a}. \tag{5,18}$$

Die hyperbolische Krümmung ϱ der von $\mathfrak{t}$ beschriebenen Kurve ergibt sich aus

$$\varrho^2 = \frac{\bar{\varepsilon}\,\mathfrak{a}'^2}{8\,\mathfrak{a}^3}. \tag{5,19}$$

d) Die in sich symmetrischen Formeln (5), (6) haben auch dann eine einfache geometrische Bedeutung, wenn die Nebenbedingung (8) nicht erfüllt ist. Erst dann wird die volle Symmetrie der Formeln (und des sich dahinter verbergenden geometrischen Gebildes) erreicht. Die Formeln erfassen dann im Urbildraum eine einparametrige Quadrikschar, deren charakteristische Kurve an jeder Stelle in ein Vierseit entartet. Die beiden Geradenpaare dieses Vierseits sind im Geradenraum für jedes t durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{z}$, d. h. durch die hierzu polaren Geraden in der Ebene $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$ bzw. in der Ebene $(\mathfrak{z}_0, \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2)$ gekennzeichnet.

Mit der Figur sind jetzt zwei hyperbolische Bilder [nämlich durch die Punkte $\mathring{\mathfrak{x}}$ und $\mathring{\mathfrak{z}}$ in den bewegten Ebenen $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$ bzw. $(\mathfrak{z}_0, \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2)$] verknüpft. Die beiden zu der Figur gehörenden schichtbaren Regelflächenpaare, die von den Gegenseitenpaaren des charakteristischen

Vierseits erzeugt werden, treten hier — im Gegensatz zu anderen Untersuchungen dieses geometrisch vielgestaltigen Gebildes[13] — völlig symmetrisch in die Betrachtung ein.

Es folgt hier: *Die Invariante*

$$\frac{<\mathfrak{z}, \mathfrak{z}>}{<\mathfrak{x}, \mathfrak{x}>} = \frac{2\,\alpha_1\,\alpha_2 + \varepsilon\,\alpha_0^2}{-2\,\beta_0\,\beta_2 + \beta_1^2},$$

das Verhältnis der hyperbolischen Bogenlängen der beiden Bildkurven und die hyperbolischen Krümmungen der beiden Bildkurven kennzeichnen eine Quadrikschar, deren charakteristische Kurve an jeder Stelle ein Vierseit ist. Diese Größen kennzeichnen also auch jedes der beiden schichtbaren Regelflächenpaare, die mit der Figur verknüpft sind.

c) Wir betrachten eine Kurve $\mathfrak{x}(t)$ auf der absoluten Quadrik des Geradenraumes und denken uns an jeder Stelle durch die Tangente der Kurve eine Ebene $\mathfrak{e}$ der Dimension zwei festgelegt. Im Urbildraum ist so neben einer Regelfläche eine an jeder Stelle sie berührende Quadrik definiert. Die zu der Ausgangsebene total polare Ebene $\mathfrak{E}$ der Dimension zwei bestimmt die zweite Geradenschar dieser Quadrik, die man wieder die Transversalschar nennt.

Diese polare Ebene $\mathfrak{E}$ werde so bewegt, daß die Tangenten an die von den Punkten der Ebene auslaufenden Bahnkurven die Gerade $(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}')$ treffen. Setzt man

$$\mathfrak{x}' = \mathfrak{t}, \tag{5,20}$$

so gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}_0' &= \alpha_0\,\mathfrak{x} + \beta_0\,\mathfrak{t}, \\ \mathfrak{z}_1' &= \alpha_1\,\mathfrak{x} + \beta_1\,\mathfrak{t}, \\ \mathfrak{z}_2' &= \alpha_2\,\mathfrak{x} + \beta_2\,\mathfrak{t}. \end{aligned} \tag{5,21}$$

Der Vektor $\mathfrak{x}$ sei wieder durch

$$<\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'> = \varkappa, \qquad \varkappa = \text{const.}$$

normiert. Es sei $\mathfrak{y}$ der Punkt der Ebene $\mathfrak{e}$ auf der absoluten Quadrik, der neben $\mathfrak{x}$ polar zu $\mathfrak{t}$ ist. Dann besteht wieder die Produkttabelle (1,11). Diese zieht mittels (20), (21) die beiden weiteren Ableitungsgleichungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}' &= \mathfrak{y} + \mathfrak{a}\,\mathfrak{x} - \varepsilon\,\beta_0\,\mathfrak{z}_0 - \beta_2\,\mathfrak{z}_1 - \beta_1\,\mathfrak{z}_2, \\ \mathfrak{y}' &= \mathfrak{a}\,\mathfrak{t} + \varepsilon\,\alpha_0\,\mathfrak{z}_0 + \alpha_2\,\mathfrak{z}_1 + \alpha_1\,\mathfrak{z}_2 \end{aligned} \tag{5,22}$$

nach sich.

[13] Man vergl. etwa: *M. Barner*, Doppelverhältnisscharen auf Regelflächen. Math. Zeitschrift **62**, 50—93 (1955).

Wir betrachten den linearen Raum der Dimension drei, der von $\mathfrak{x}$ und $\mathbf{E}$ aufgespannt wird. Die Ebene $\hat{\mathbf{E}}$ der Dimension zwei in diesem Raum, die bestimmt ist von den Punkten

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{d}}_0 &= \mathfrak{d}_0 - \beta_0\,\mathfrak{x}, \\ \hat{\mathfrak{d}}_1 &= \mathfrak{d}_1 - \beta_1\,\mathfrak{x}, \\ \hat{\mathfrak{d}}_2 &= \mathfrak{d}_2 - \beta_2\,\mathfrak{x}, \end{aligned} \tag{5,23}$$

ist total polar zu der Schmiegebene der Dimension zwei der Kurve $\mathfrak{x}(t)$. Die Ebene $\hat{\mathbf{E}}$ schneidet also aus der absoluten Quadrik die Bildpunkte der Schmiegtangenten der Regelfläche längs der betrachteten Erzeugenden mit dem Bild $\mathfrak{x}$ aus.

Die beiden Ebenen $\mathbf{E}$ und $\hat{\mathbf{E}}$ sind durch eine Perspektivität mit dem Zentrum $\mathfrak{x}$ projektiv aufeinander abgebildet. Dabei entsprechen sich die Schnittkegelschnitte in beiden Ebenen. Führen wir in $\hat{\mathbf{E}}$ lokale Koordinaten durch

$$\hat{\mathfrak{y}} = \hat{p}_0\,\hat{\mathfrak{d}}_0 + \hat{p}_1\,\hat{\mathfrak{d}}_1 + \hat{p}_2\,\hat{\mathfrak{d}}_2 \tag{5,24}$$

ein, so wird die Abbildung durch gleiche Werte der lokalen Koordinaten hergestellt.

Eine Bahnkurve, die erzeugt wird von einem festen Punkt des Kegelschnittes der bewegten Ebene $\hat{\mathbf{E}}$, hat als Urbild eine Asymptotenlinie der Regelfläche. Es gilt ja

$$\tilde{\mathfrak{d}}_i' \equiv 0 \pmod{\mathfrak{d}_i, \mathfrak{x}}, \qquad i = 0, 1, 2. \tag{5,25}$$

Eine Bahnkurve, die erzeugt wird von einem festen Punkt des Kegelschnittes der bewegten Ebene $\mathbf{E}$, hat als Urbild eine Regelfläche durch eine Asymptotenlinie der Ausgangsregelfläche. Ihre Erzeugende ist an jeder Stelle Transversalgerade der ausgezeichneten Quadrik.

Wir wollen die Ebenenschar $\mathbf{E}(t)$ in anderer Weise projektiv bewegen. Es sei

$$\hat{\mathfrak{d}}_i = \sum_{k=0}^{2} p_{ik}\,\mathfrak{d}_k, \qquad i = 0, 1, 2 \tag{5,26}$$

eine Basis der neuen Bewegung. Dann folgt

$$\tilde{\mathfrak{d}}_i' = \sum_{k,l=0}^{2} p_{ik}'\,P_{kl}\,\tilde{\mathfrak{d}}_l + \sum_{k=0}^{2} p_{ik}\,\alpha_k\,\mathfrak{x} + \sum_{k=0}^{2} p_{ik}\,\beta_k\,\mathfrak{t}, \tag{5,27}$$

wobei (P_{ik}) die zu (p_{ik}) inverse Matrix darstellt. Genügen auch die

neuen Basisvektoren der Produkttabelle (1,11), so erhalten die Gleichungen (27) bei neuer Bezeichnung die Gestalt

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathfrak{d}}_0' &= \quad + \gamma_2 \tilde{\mathfrak{d}}_1 - \gamma_1 \tilde{\mathfrak{d}}_2 + \tilde{\alpha}_0 \mathfrak{x} + \tilde{\beta}_0 \mathfrak{t}, \\
\tilde{\mathfrak{d}}_1' &= \varepsilon \gamma_1 \tilde{\mathfrak{d}}_0 + \gamma_0 \tilde{\mathfrak{d}}_1 \quad + \tilde{\alpha}_1 \mathfrak{x} + \tilde{\beta}_1 \mathfrak{t}, \\
\tilde{\mathfrak{d}}_2' &= -\varepsilon \gamma_2 \tilde{\mathfrak{d}}_0 - \gamma_0 \tilde{\mathfrak{d}}_2 + \tilde{\alpha}_2 \mathfrak{x} + \tilde{\beta}_2 \mathfrak{t}.
\end{aligned} \tag{5,28}$$

Hierin kennzeichnet der erste Bestandteil, nämlich

$$\begin{aligned}
\mathring{\mathfrak{d}}_0' &= \quad + \gamma_2 \mathring{\mathfrak{d}}_1 - \gamma_1 \mathring{\mathfrak{d}}_2, \\
\mathring{\mathfrak{d}}_1' &= \varepsilon \gamma_1 \mathring{\mathfrak{d}}_0 + \gamma_0 \mathring{\mathfrak{d}}_1, \\
\mathring{\mathfrak{d}}_2' &= -\varepsilon \gamma_2 \mathring{\mathfrak{d}}_0 - \gamma_0 \mathring{\mathfrak{d}}_2,
\end{aligned} \tag{5,29}$$

die durch die neue Bewegung in der bewegten Ebene **E** induzierte Bewegung.

Die bewegte Ebene schneidet für jeden Wert von t den Kegelschnitt

$$\mathfrak{k} = 2 s \tilde{\mathfrak{d}}_0 + 2 \tilde{\mathfrak{d}}_1 - \varepsilon s^2 \tilde{\mathfrak{d}}_2$$

in der absoluten Quadrik aus. Wir betrachten diese einparametrige Kegelschnittschar und die Bahnkurven, die sie ineinander überführen. Deutet man den $\mathbf{R}_5$ als Geradenraum ($\varepsilon = -1$), so gehört zu dieser Kegelschnittschar eine Geradenkongruenz des R_3. Kann man die projektive Bewegung so wählen, daß die Bahnkurven die Torsallinien der Kongruenz sind? Eine solche Bewegung wäre dann invariant mit der Figur verbunden.

Im $\mathbf{R}_5$ liegt für eine solche Bewegung mit einer Bahnkurve auch deren Tangentengesamtheit auf der absoluten Quadrik. Es gilt also identisch in s

$$< \mathfrak{k}_t, \mathfrak{k}_t > = 0. \tag{5,30}$$

Dies führt auf die Bedingungen

$$\gamma_i = \pm \tilde{\beta}_i, \qquad i = 0, 1, 2, \tag{5,31}$$

wobei in allen Gleichungen entweder das positive oder das negative Zeichen gilt.

Im R_3 sind so auf der Regelfläche zwei zueinander konjugierte Doppelverhältnisscharen definiert. Geht man von einer Doppelverhältnisschar des R_3 aus, indem man die Ableitungsgleichungen

$$\mathfrak{q}_k'' = \alpha_{k0} \mathfrak{q}_1 + \alpha_{k2} \mathfrak{q}_2 + \beta_{k1} \mathfrak{q}_1' + \beta_{k2} \mathfrak{q}_2', \quad k = 1, 2, \tag{5,32}$$

$$\beta_{11} + \beta_{22} = 0$$

zugrunde legt, und setzt man weiter

$$\mathfrak{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_1\, q_2), \quad \mathfrak{y} = \sqrt{2}\,(q_1', q_2'),$$

$$\tilde{\mathfrak{d}}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}[(q_1', q_2) - (q_1, q_2')], \quad \tilde{\mathfrak{d}}_1 = (q_1, q_1') \quad \tilde{\mathfrak{d}}_2 = (q_2, q_2');$$

$$\tilde{\beta}_0 = \gamma_0 = \beta_{11}, \qquad \tilde{\beta}_1 = \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_{12}, \quad \tilde{\beta}_2 = \gamma_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\beta_{21}; \tag{5,33}$$

$$\tilde{\alpha}_0 = \alpha_{11} - \alpha_{22}, \quad \tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_{12}, \qquad \tilde{\alpha}_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_{21};$$

$$\varepsilon = -1, \quad \mathbf{a} = \alpha_{11} + \alpha_{22},$$

so gelangt man genau zu (28) mit (31), wobei in (31) das positive Zeichen zu nehmen ist.

Die Betrachtung dieses Abschnittes gibt also den geradengeometrischen Zugang zu der Theorie der Doppelverhältnisscharen auf Regelflächen und damit einen neuen Zugang zu der mit einer Doppelverhältnisschar verknüpften hyperbolischen Bewegung (29). Gewisse Fragen (geradengeometrischer Natur) werden sich hier leichter und unmittelbarer behandeln lassen, als dies in der Theorie im dreidimensionalen Raum möglich war. Wir haben die allgemeine Theorie an anderer Stelle ausführlich verfolgt[14].

f) Der Ausgangspunkt unserer Überlegungen bildete die Abwicklung einer allgemeinen Regelfläche über zwei ihrer Asymptotenlinien auf eine Komplexregelfläche. Man kann auch von der bewegten Ebene des $\mathbf{R}_5$ ausgehen, sich also im Urbild-R_3 eine Komplexregelfläche vorgegeben denken. Dann hängen die möglichen Abwicklungen unter Auszeichnung dieser Figur des bewegten Systems noch von einer willkürlichen Funktion ab.

Insbesondere gilt: *Bezieht man eine Komplexregelfläche auf die beiden Asymptotenlinien, die in dem festen Komplex liegen, und ist die Komplexregelfläche dann durch die Invarianten* $\mathbf{a}$, α_1, α_2 *gekennzeichnet, so kann man eine einparametrige Schar von Projektivitäten so angeben, daß ein W-Strahlsystem entsteht, dessen Brennflächen Komplexflächen sind, und ferner die entstehende singuläre Geradengesamtheit als Regelfläche durch die Invarianten* $\mathbf{a}$, α_1, α_2 *und die vorgegebene Größe* α_0 *als gleichbenannte Invariante charakterisiert wird. Dabei ist diese Regelfläche auf die beiden singulären Kurven der Brennflächen bezogen; diese Kurven sind Asym-*

[14] Vergl. Zitat in Fußnote 13, S. 48.

ptotenlinien der Regelfläche. Die zugehörige projektive Bewegung ist durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt.

g) Einfache kinematische Überlegungen haben hier zu geometrischen Ergebnissen geführt. Dabei spielten die Zentralbewegungen einer Hyperebene im Geradenraum normal zu sich im Sinne der hyperbolischen Geometrie eine hervorragende Rolle. Man ist versucht, die verwendete Methode auf andere Gebilde auszudehnen, mit denen im Geradenraum eine einparametrige Hyperebenenschar verknüpft ist.

Die Diskussion der möglichen Zentralbewegungen im Geradenraum zeigt jedoch[15], daß zu einer so bewegten Hyperebene invariant eine der nachgenannten Figuren das Urbild-R_3 gehört: I. Zwei zusammengehörende schichtbildende Regelflächen; II. Eine Regelfläche unter Auszeichnung zweier ihrer Asymptotenlinien; III. Die Tangentengesamtheit einer Raumkurve.

Den Fall II. haben wir unter anderem hier behandelt. Auf I. und III. sind wir an anderer Stelle eingegangen[16].

Daß Zentralbewegungen von Ebenen der Dimension zwei auch bei anderen Fragestellungen auftreten, zeigt eine zur Zeit erscheinende Arbeit von *H. Kunle*[17], in der die T-Figuren in einem quadratischen Komplex bestimmt werden.

Wir hoffen bald auf weitere Abwicklungsfragen anderen Charakters der projektiven Differentialgeometrie unter Benützung kinematischer Methoden zurückzukommen.

6. Bemerkungen zur LIE-Geometrie[18] der Krümmungsstreifen.

a) Durch den Punktvektor $\mathfrak{x}(t)$ und den normierten Einheitsvektor $\mathfrak{n}(t)$

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}(t) &= \{x_1(t), x_2(t), x_3(t)\}, & \mathfrak{x}'\,\mathfrak{n} &= 0, \\ \mathfrak{n}(t) &= \{n_1(t), n_2(t), n_3(t)\}, & \mathfrak{n}\,\mathfrak{n} &= 1 \end{aligned} \qquad (6,1)$$

[15] *M. Barner*, Zur projektiven Differentialgeometrie der Komplexflächen. III. Schiebungen als Abrollvorgänge. Singularitätskurven auf Komplexflächen. Invariante Gebilde. Math. Annalen **129**, 304—322 (1955).

[16] (Vgl. Fußnote 15 und Fußnote 1, S. 21.

[17] *H. Kunle*, Über T-Figuren in einem quadratischen Komplex. Math. Zeitschrift **62** (1955).

[18] Die wenigen hier benützten Zusammenhänge sind hergeleitet. Im übrigen vergleiche man: *W. Blaschke — G. Thomsen*, Differentialgeometrie der Kugeln und Kreise (1929).

ist in Abhängigkeit von t ein Krümmungsstreifen des euklidischen Raumes mit der Streifenkurve $\mathfrak{x}(t)$ und dem Streifennormalenvektor $\mathfrak{n}(t)$ bestimmt, falls gilt

$$\mathfrak{n}' = \varrho\, \mathfrak{x}'. \tag{6,2}$$

Die Kugeln mit dem Radius R und dem Mittelpunkt $\mathfrak{x}(t) - R\,\mathfrak{n}(t)$ berühren den Streifen. Hierunter ist mit $R = 1/\varrho$ die Krümmungskugel des Streifens ausgezeichnet.

Wir betrachten zwei durch gleiche Werte des Parameters t aufeinander bezogene Krümmungsstreifen $\mathfrak{x}^i$, $\mathfrak{n}^i (i = 1, 2)$, die an jeder Stelle eine gemeinsame Berührkugel besitzen. Zur *Lie*geometrischen Behandlung dieses Gebildes ordnet man den Krümmungskugeln beider Streifen bzw. der gemeinsamen Berührkugel die Punkte

$$\begin{aligned}
\mathfrak{z}_i &= \{\varrho^i, \varrho^i x_1^i - n_1^i, \varrho^i x_2^i - n_2^i, \varrho^i x_3^i - n_3^i, \varrho^i \mathfrak{x}^i \mathfrak{x}^i - 2\,\mathfrak{x}^i \mathfrak{n}^i, 1\}, \qquad i = 1, 2; \\
\mathfrak{x} &= \{R, R x_1^1 - n_1^1, R x_2^1 - n_2^1, R x_3^1 - n_3^1, R \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_1 - 2\,\mathfrak{x}^1 \mathfrak{n}^1, 1\} \qquad (6,3) \\
&= \{R, R x_1^2 - n_1^2, R x_2^2 - n_2^2, R x_3^1 - n_3^2, R \mathfrak{x}^2 \mathfrak{x}^2 - 2\,\mathfrak{x}^2 \mathfrak{n}^2, 1\}
\end{aligned}$$

eines projektiven fünfdimensionalen Raumes zu, in dem die Quadrik

$$< \mathfrak{p}, \mathfrak{p} > \equiv - \mathfrak{p}_0 \mathfrak{p}_4 + \mathfrak{p}_1^2 + \mathfrak{p}_2^2 + \mathfrak{p}_3^2 - \mathfrak{p}_5^2 = 0 \tag{6,4}$$

ausgezeichnet ist. Diese Quadrik ist reell projektiv gleichwertig der Quadrik (1,19) mit $\varepsilon = 1$. Man bestätigt dann an Hand von (3) wegen (2)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{z}_i' &\equiv 0 \pmod{\mathfrak{z}_i, \mathfrak{x}}, \qquad i = 1, 2, \\
< \mathfrak{z}_i, \mathfrak{z}_i > &= < \mathfrak{z}_i, \mathfrak{x} > = < \mathfrak{x}, \mathfrak{x} > = 0.
\end{aligned} \tag{6,5}$$

Umgekehrt gehören zu zwei Kurven $\mathfrak{z}_i$ des $\mathbf{R}_5$ mit (5) (von Ausnahmestellen abgesehen) nach (3), (2) und (1) zwei Krümmungsstreifen des euklidischen Raumes, die an jeder Stelle eine gemeinsame Berührkugel mit dem Bild $\mathfrak{x}$ besitzen.

Vergleicht man dies mit (1,4) und beachtet, daß die Streifen mit den Bildern $\mathfrak{z}_i$ Krümmungslinien auf der von der Kugelschar mit dem Bild $\mathfrak{x}$ eingehüllten *Kanalfläche* beschreiben, so folgt: *Die Formeln des Abschnittes* **1**, *insbesondere* (1,12), (1,15), (1,16) *kennzeichnen mit* $\varepsilon = 1$ *die Lie-Geometrie der Kanalflächen unter Auszeichnung zweier ihrer Krümmungslinien.*

Weiter zeigt dann [**4**b], wie man unter Verwendung der mit der Kanalfläche im Bildraum verbundenen Zentralbewegung die Theorie der Kanalflächen von den zufällig ausgewählten Krümmungsstreifen loslösen kann, indem man die ausgezeichneten Punkte in der bewegten Ebene (d. h. der hyperbolischen Bildebene) betrachtet.

Die Typeneinteilung (vgl. [4c]) der geschlossenen „konvexen" Regelflächen überträgt sich sofort auf die Kanalflächen. Daraus entnimmt man: Eine geschlossene Krümmungslinie einer geschlossenen Kanalfläche hat dann mindestens zwei Stellen stationärer Krümmungskugel, falls es einen linearen Kugelkomplex gibt, dem eine Krümmungskugel des Krümmungsstreifens, aber keine erzeugende Kugel der Kanalfläche angehört. Für die Krümmungsstreifen der euklidischen Geometrie sind die Voraussetzungen trivialerweise erfüllt und die Aussage ist selbstverständlich.

Weiterhin ergibt sich die Mindestanzahl der Stellen stationärer Krümmungskugel eines geschlossenen Krümmungsstreifens, der auf einer Kanalfläche des Typs B bzw. C liegt, zu 4 bzw. 6. Als Sonderfall ist hierin ein Satz von *W. Süß*[19] enthalten, wonach ein geschlossener Krümmungsstreifen mit konvexer Streifenkurve mindestens vier stationäre Krümmungskugeln besitzt[20]. Die Streifenkurve selbst definiert ja im Sinne der *Lie*-Geometrie eine Kanalfläche. Ist diese Streifenkurve konvex, d. h., gibt es durch je zwei Punkte der Kurve eine Kugel oder Ebene, die die Kurve sonst nicht trifft, so ist auch die durch sie definierte Kanalfläche vom Typ B. Daraus folgt die Behauptung. Kann man nun weiterhin durch den geschlossenen Krümmungsstreifen eine geschlossene Kugelschar so auswählen, daß je vier Kugeln einem linearen Kugelkomplex angehören, in der keine weitere Kugel der Schar liegt, so lehrt [4c], daß unser Streifen sogar mindestens 6 Stellen stationärer Krümmungskugel besitzt.

b) Ist für die Figur zweier Krümmungsstreifen einer Kanalfläche in ihrer *Lie*-geometrischen Behandlungsweise nach (1,12)

$$a_0 = 0, \tag{6,6}$$

so heißt dies, daß die die Krümmungsstreifen berührenden Kugeln und damit auch die erzeugenden Kugeln der Kanalfläche einem gemeinsamen festen linearen Kugelkomplex angehören. Für den euklidischen Urbildraum folgt daraus insbesondere, daß jede der Streifenkurven auf einer Kugel (oder in einer Ebene) liegt. Gilt (6), so sind die ausgezeichneten Krümmungslinien der Kanalfläche also sphärisch.

Abschnitt 2 lehrt dann: *Mit einer Kanalfläche ist unter Auszeichnung zweier ihrer Krümmungslinien im Bildraum eine Zentralbewegung in-*

[19] *W. Süß*, Aufg. 56. Jahresb. der Deutschen Math. Ver. **37**, *28* (1928). Lösung hierzu: *Jos. E. Hofmann*, ebenda **38**, *76—77* (1929).

[20] Dieser Satz umfaßt wiederum den klassischen Vierscheitelsatz der ebenen euklidischen Geometrie.

variant verbunden. Diese Bewegung bildet die Kanalfläche und die ausgezeichneten Krümmungslinien ab auf eine Kanalfläche und zwei Krümmungslinien, die einem gemeinsamen linearen Kugelkomplex angehören. Bei dieser Abbildung entsprechen sich die die Figur kennzeichnenden Invarianten außer der Größe a_0, die für die Figur im linearen Komplex verschwindet.

Und weiter: *An jeder Stelle einer Kanalfläche ist unter Auszeichnung zweier ihrer Krümmungslinien eine Kanalfläche in einem linearen Kugelkomplex invariant verbunden. Zu den Ausgezeichneten Krümmungslinien gehören die sphärischen Kurven der Kanalfläche in dem linearen Komplex. Entlang der Kanalfläche erzeugen diese beiden sphärischen Kurven zwei Flächen, deren eine Schar von Krümmungslinien sie sind. An jeder Stelle berühren sich die Ausgangskanalfläche und die zugeordnete Kanalfläche im linearen Komplex Lie-geometrisch in zweiter Ordnung, die ausgezeichneten Krümmungslinien und die zugeordneten sphärischen Streifenkurven Lie-geometrisch in dritter Ordnung. Die ausgezeichneten Krümmungslinien der Ausgangskanalfläche bestimmen also singuläre Streifen auf den von den sphärischen Kurven erzeugten Flächen — die erzeugenden Streifen mit sphärischer Streifenkurve hüllen diese ausgezeichneten Krümmungsstreifen ein.*

(4,12) bilden die Grundformeln zur Behandlung der *Lie*-Geometrie der Krümmungsstreifen. Die Ergebnisse von [**4**d] sprechen sich in der *Lie*-Geometrie der Krümmungsstreifen wie folgt aus: *Bezieht man einen allgemeinen Krümmungsstreifen so auf einen Krümmungsstreifen mit sphärischer Streifenkurve, daß die Lie-geometrische Invariante* **a** *auf beiden Streifen übereinstimmt, so gibt es durch den allgemeinen Krümmungsstreifen genau zwei Kanalflächen der Art, daß eine Abbildung der beschriebenen Art den Krümmungsstreifen in den Streifen mit sphärischer Kurve überführt. Reell sind diese Gebilde nur, falls*

$$c - \overset{=}{c} > 0$$

ist.

c) Drei nacheinander durchgeführte Abbildungen führen eine allgemeine Kanalfläche in eine Kugelschar einer *Dupin*schen Zyklide über. Bei diesen Abbildungen bleibt die Invariante **a** einer Kanalfläche erhalten. Diese Größe wird so einer geometrischen Deutung in bezug auf die Parameterverteilung zugänglich (vgl. [5b, c]). Statt dessen kann man mit dem gleichen Ergebnis auch eine einzige andere Zentralbewegung im Bildraum, nämlich (5,5), betrachten.

Hierdurch wird man zugleich auf die Figur einer derartig bewegten *Dupin*schen Zyklide geführt, daß das Schnittgebilde zweier benachbarter Zykliden — *Lie*-geometrisch gedeutet — aus vier Kugeln besteht. Hier treten gegenüber der Geradengeometrie [ebenso wie bei den *Lie*-geometrischen Analogon einer Doppelverhältnisschar auf einer Regelfläche (vgl. [5e])] wesentliche Realitätsunterschiede auf. Es würde sich deshalb lohnen, diese Fragen für die *Lie*-Geometrie von Neuem zu verfolgen.

Randvorgaben bei infinitesimaler Verbiegung einfach zusammenhängender konvexer Flächen

Von

Eduard Rembs, Berlin

(Eingelangt am 17. September 1955)

In einer demnächst in den Abhandlungen des mathematischen Seminars der Universität Hamburg erscheinenden Arbeit [1] habe ich angekündigt, daß ich die Probleme der Randvorgaben bei infinitesimaler Verbiegung konvexer Flächen mit der neueren Theorie eines Systems von zwei linearen partiellen elliptischen Differentialgleichungen in Verbindung bringen würde. Das soll hiermit geschehen. Wenn auch zunächst auf diese Art nur in geringem Umfang neue Ergebnisse gewonnen werden, — immerhin sind die Starrheitssätze von Nr. 5 beachtlich —, so ist es doch von Wichtigkeit, diesen Zusammenhang herzustellen. Denn hiermit ist der Weg angegeben, den die weitere Entwicklung der infinitesimalen Verbiegungstheorie nehmen muß, um zu einem systematischen Ausbau zu gelangen; alle bisherigen Beweise für Starrheitsaussagen stellen nämlich nur ad hoc erfundene, wenn auch vielleicht elegante Kunstgriffe dar.

1. Die Randvorgaben, die wir im folgenden betrachten wollen, lauten: Vorgabe der Variation δk der Krümmung k der Randkurve, Vorgabe der Variation δa der geodätischen Torsion a des Randstreifens und Vorgabe der Variation $\delta\varphi$ des Winkels φ, den die Randstreifennormale η mit der Hauptnormale der Randkurve bildet. Vorgabe der Variation δb der Normalkrümmung längs des Randes kommt auf die zuerst angegebene Aufgabe zurück. Natürlich ließen sich diese Aufgaben noch mannigfach vermehren, besonders wenn man neben den Randaufgaben erster Art auch solche zweiter und dritter Art zur Debatte stellen will, bei denen nicht die Variationen der Größen selbst gegeben sind, sondern ihre Ableitungen in Richtung der Randnormalen in der Parameterebene oder lineare Kombinationen von beiden; hier kann na-

türlich nur die Rede sein von Größen, die in einer gewissen Umgebung der Randpunkte definiert sind[1].

Unsere erste Aufgabe besteht darin, für die Größen δk, δa, $\delta\varphi$ brauchbare Ausdrücke anzugeben, durch welche diese Variationen mittels der Geschwindigkeitsvektoren $\mathfrak{z}$ der infinitesimalen Verbiegung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{x} + t\mathfrak{z}$ oder der Drehvektoren $\mathfrak{y}$ dargestellt werden.

Die Krümmung k der auf die Bogenlänge bezogenen Randkurve erscheint bekanntlich in der Form $k^2 = \mathfrak{x}''^2$. Da bei infinitesimaler Verbiegung die Bogenlänge stationär ist, so erhält man

$$(k + t\delta k)^2 = (\mathfrak{x}'' + t\mathfrak{z}'')^2,$$

wobei die Gleichung, wie üblich, nur für die von t freien und die in t linearen Glieder gemeint ist; letztere ergeben

$$k\delta k = (\mathfrak{x}''\mathfrak{z}'').$$

Nun gilt bekanntlich

$$\mathfrak{z}' = \mathfrak{y} \times \mathfrak{x}',$$

also

$$\mathfrak{z}'' = \mathfrak{y}' \times \mathfrak{x}' + \mathfrak{y} \times \mathfrak{x}''.$$

Setzt man das ein und bezeichnet mit $\mathfrak{h}$ die Hauptnormale und mit $\mathfrak{b}$ die Binormale der Randkurve, so ergibt sich

$$k\delta k = (\mathfrak{y}'\mathfrak{x}'\mathfrak{x}'') = k(\mathfrak{y}'\mathfrak{x}'\mathfrak{h}) = k(\mathfrak{y}'\mathfrak{b}).$$

Hieraus folgt wegen $k \neq 0$

$$\delta k = (\mathfrak{y}'\mathfrak{b}). \tag{1}$$

Aus der bekannten [2] Formel

$$\mathfrak{y}' = \delta a\, \mathfrak{x}' + \delta b \eta$$

findet man durch Multiplikation mit $\mathfrak{x}'$ wegen $(\eta\mathfrak{x}') = 0$ und $\mathfrak{x}'^2 = 1$

$$\delta a = (\mathfrak{y}'\mathfrak{x}'). \tag{2}$$

Endlich multiplizieren wir die Formel noch mit der Hauptnormale $\mathfrak{h}$:

$$(\mathfrak{y}'\mathfrak{h}) = \delta b(\eta\mathfrak{h})$$

wegen $(\mathfrak{h}\mathfrak{x}') = 0$. Wir setzen $(\eta\mathfrak{h}) = \cos\varphi$. Aus (vgl. [3] S. 69)

$$b = k \sin\varphi,\ c = k\cos\varphi$$

folgt aber durch Variation wegen $\delta c = 0$

$$\delta b = \delta k \sin\varphi + k\cos\varphi\, \delta\varphi,\ \ 0 = \delta k \cos\varphi - k \sin\varphi\delta\varphi$$

[1] Eine andere Randwertaufgabe bei infinitesimaler Verbiegung in [10].

und, indem man die erste Gleichung mit $\cos\varphi$, die zweite mit $-\sin\varphi$ multipliziert und addiert,

$$\delta b \cos\varphi = k\delta\varphi;$$

daher ist

$$\delta\varphi = \frac{1}{k}\,(\mathfrak{y}'\mathfrak{h}). \tag{3}$$

Wie man sieht, sind die Formeln dadurch ausgezeichnet, daß auf der rechten Seite die Skalarprodukte von $\mathfrak{y}'$ mit den Grundvektoren der Randkurve erscheinen.

2. Zur Bestimmung von $\mathfrak{y}$ hat man die Gleichungen

$$\mathfrak{y}_u = \alpha\mathfrak{x}_u + \beta\mathfrak{x}_v,\ \mathfrak{y}_v = \gamma\mathfrak{x}_u - \alpha\mathfrak{x}_v, \tag{4}$$

wo α, β, γ dem folgenden Gleichungssystem genügen müssen [4]

$$L\gamma - 2M\alpha - N\beta = 0, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \alpha_v - \gamma_u &= \left\{\begin{smallmatrix}11\\1\end{smallmatrix}\right\}\gamma - 2\left\{\begin{smallmatrix}12\\1\end{smallmatrix}\right\}\alpha - \left\{\begin{smallmatrix}22\\1\end{smallmatrix}\right\}\beta, \\ \alpha_u + \beta_v &= \left\{\begin{smallmatrix}11\\2\end{smallmatrix}\right\}\gamma - 2\left\{\begin{smallmatrix}12\\1\end{smallmatrix}\right\}\alpha - \left\{\begin{smallmatrix}22\\2\end{smallmatrix}\right\}\beta. \end{aligned} \tag{6}$$

Das sind die variierten *Gauß-Codazzi*schen Gleichungen. Wir wollen uns jetzt auf solche einfach zusammenhängenden Flächenstücke positiver Krümmung beschränken, bei denen es ein auf der ganzen Fläche reguläres isotherm-konjugiertes oder, wie man auch sagt, affin-isothermes Parametersystem gibt; d. h. es soll überall

$$L = N,\ M = 0$$

gelten. Dann folgt aus (5)

$$\gamma = \beta,$$

und die Gleichungen (6) nehmen die Form an

$$\begin{aligned} \beta_u - \alpha_v &= (-\left\{\begin{smallmatrix}11\\1\end{smallmatrix}\right\} + \left\{\begin{smallmatrix}22\\1\end{smallmatrix}\right\})\beta + 2\left\{\begin{smallmatrix}12\\1\end{smallmatrix}\right\}\alpha, \\ \beta_v + \alpha_u &= (\left\{\begin{smallmatrix}11\\2\end{smallmatrix}\right\} - \left\{\begin{smallmatrix}22\\2\end{smallmatrix}\right\})\beta - 2\left\{\begin{smallmatrix}12\\2\end{smallmatrix}\right\}\alpha. \end{aligned} \tag{7}$$

3. Jetzt formen wir die Gleichungen (1), (2), (3) mittels (4) so um, daß sie zu Randbedingungen für β, α werden. Wir setzen $\mathfrak{y}' = \mathfrak{y}_u u' + \mathfrak{y}_v v'$ und erhalten aus (1)

$$(\mathfrak{y}_u\mathfrak{b})\,u' + (\mathfrak{y}_v\mathfrak{b})\,v' = \delta k$$

und nach (4) wegen $\gamma = \beta$

$$[(\mathfrak{x}_v\mathfrak{b})\,u' + (\mathfrak{x}_u\mathfrak{b})\,v']\,\beta + [(\mathfrak{x}_u\mathfrak{b})u' - (\mathfrak{x}_v\mathfrak{b})\,v']\,\alpha = \delta k. \tag{1a}$$

Ebenso liefert die Gleichung (2)

$$(\mathfrak{y}_u\mathfrak{x}')\,u' + (\mathfrak{y}_v\mathfrak{x}')\,v' = \delta a$$

und weiter

$$(\mathfrak{y}_u\mathfrak{x}_u)\,u'^2 + [(\mathfrak{y}_u\mathfrak{x}_v) + (\mathfrak{y}_v\mathfrak{x}_u)]\,u'v' + (\mathfrak{y}_v\mathfrak{x}_v)]\,v'^2 = \delta a,$$

also wegen (4)

$$[F(u'^2 + v'^2) + (E + G)\,u'v']\,\beta + [Eu'^2 - Gv'^2]\,\alpha = \delta a. \qquad (2a)$$

Die Gleichung (3) ergibt analog zu (1a)

$$[(\mathfrak{x}_v\mathfrak{h})\,u' + (\mathfrak{x}_u\mathfrak{h})\,v']\,\beta + [(\mathfrak{x}_v\mathfrak{h})\,u' - (\mathfrak{x}_v\mathfrak{h})\,v']\,\alpha = k\delta\varphi, \qquad (3a)$$

und wir lassen sie wegen der großen Ähnlichkeit mit (1a) ferner außer Betracht. Übrigens ist ja auch $k \sin\varphi\,\delta\varphi = \delta k \cos\varphi$.

4. Wir müssen jetzt den Charakter der Probleme (1a) und (2a) ermitteln. Zur Umformung von (1a) benützen wir die Gleichung (Bemerkung des Herrn *Grotemeyer*)

$$(\mathfrak{x}'\mathfrak{b}) = 0$$

oder

$$(\mathfrak{x}_u\mathfrak{b})\,u' + (\mathfrak{x}_v\mathfrak{b})\,v' = 0$$

und setzen also

$$(\mathfrak{x}_v\mathfrak{b}) = \lambda u',\ (\mathfrak{x}_u\mathfrak{b}) = -\lambda v',\ \lambda^2 = \frac{(\mathfrak{x}_u\mathfrak{b})^2 + (\mathfrak{x}_v\mathfrak{b})^2}{u'^2 + v'^2}.$$

Dann geht (1a) über in

$$(u'^2 - v'^2)\,\beta - 2\,u'v'\,\alpha = \frac{\delta k\sqrt{u'^2 + v'^2}}{\sqrt{(\mathfrak{x}_u\mathfrak{b})^2 + (\mathfrak{x}_v\mathfrak{b})^2}}.$$

Nun sei σ die Bogenlänge der Randkurve in der Parameterebene. Wir bezeichnen die Ableitungen nach σ durch einen Punkt, so daß z. B. $u' = \frac{\dot{u}}{\dot{s}}$ ist. Man erhält

$$(\dot{u}^2 - \dot{v}^2)\,\beta - 2\,\dot{u}\dot{v}\,\alpha = \frac{\dot{s}\delta k}{\sqrt{(\mathfrak{x}_u\mathfrak{b})^2 + (\mathfrak{x}_v\mathfrak{b})^2}}.$$

Nennt man ϑ den Winkel der Kurvennormalen mit der positiven 1-Achse, so können wir setzen

$$\dot{u} = -\sin\vartheta,\ \dot{v} = \cos\vartheta.$$

Also lautet die Randbedingung

$$\cos 2\vartheta\,\beta - \sin 2\vartheta\,\alpha = -\frac{\dot{s}\delta k}{\sqrt{(\mathfrak{x}_u\mathfrak{b})^2 + (\mathfrak{x}_v\mathfrak{b})^2}}. \qquad (1b)$$

Um für (2a) eine ebenso einfache Formel zu erhalten, beschränken wir uns auf den Fall einer zunächst nicht notwendig ebenrandigen

Kugelkalotte. Dann ist $E:F:G = L:M:N$. und nach unserer Annahme über L, M, N ist $E = G, F = 0$. Daher vereinfacht sich (2a) zu

$$2\,u'v'(E\beta) + (u'^2 - v'^2)\,(E\alpha) = \delta a;$$

und mit derselben Substitution wie vorhin erhalten wir

$$\sin 2\,\vartheta(E\beta) + \cos 2\,\vartheta(E\alpha) = -\,\dot{s}^2\,\delta a. \tag{2b}$$

5. Aus (1b) und (2b) ergibt sich, daß die Probleme von der gleichen Art sind. Ihre Charakteristik [5][2] ist gleich + 2. *Nach der Theorie haben dann die homogenen Probleme* $\delta k = 0$ *oder* $\delta a = 0$ *am Rande nur die Lösung* $\alpha \equiv \beta \equiv 0$, *was Starrheit bedeutet.* Für $\delta a = 0$ am Rande war das noch nicht bekannt. *Auch ist die Aussage ebenso wie für* $\delta k = 0$ *am Rande nicht auf ebenrandige Kugelkalotten beschränkt. Sie gilt bei* $\delta k = 0$ *sogar für beliebige einfach zusammenhängende Flächenstücke positiver Krümmung.* Dieses Ergebnis konnte mit den bisherigen Methoden nicht erzielt werden. Allerdings erinnern wir an die oben gemachte Voraussetzung bezgl. der Parameternetze. Wenn für $\delta k \not\equiv 0$ oder $\delta a \not\equiv 0$ am Rande Lösungen existieren sollen, muß die Vorgabe drei Integralbedingungen genügen, zu deren Angabe das adjungierte Problem heranzuziehen ist. Da wir vorerst die drei Lösungen des adjungierten Problems im allgemeinen Fall nicht kennen, wird für beide Fälle jetzt nur eine ebenrandige Kugelkalotte (Einheitskugel) in Betracht gezogen, deren sphärischer Mittelpunkt der Nordpol sei. Sie wird aus dem Südpol stereographisch auf die Äquatorebene projiziert und auf rechtwinklige Koordinaten in dieser bezogen. Das ist ein keiner Beschränkung bezüglich der Größe unterworfenes Koordinatensystem der geforderten Art. Es ist

$$E = G = \frac{4}{(1+r^2)^2},\quad F = 0,\quad r^2 = u^2 + v^2,$$

$$\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} = -\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = \frac{E_u}{2E},\quad \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = -\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} = \frac{E_v}{2E},\quad \sqrt{(x_u b)^2 + (x_v b)^2} = \frac{4r}{(1+r^2)^2}.$$

Die Differentialgleichungen lauten

$$(E\beta)_u - (E\alpha)_v = 0,$$
$$(E\beta)_v + (E\alpha)_u = 0$$

und die Randbedingung im ersten Fall

$$\cos 2\,\vartheta(E\beta) - \sin 2\,\vartheta(E\alpha) = -\frac{2\,\delta k}{r(1+r^2)} \tag{1c}$$

[2] Wegen der Literatur vgl. auch [6].

und im zweiten Fall

$$\sin 2\,\vartheta(E\beta) + \cos 2\,\vartheta(E\alpha) = -\frac{4\,\delta a}{(1+r^2)^2}. \tag{2c}$$

Am Rande ist r konstant. Bei den adjungierten Problemen handelt es sich um die *Cauchy-Riemann*schen Gleichungen mit den Randbedingungen

$$\bar{\beta}\cos\vartheta + \bar{\alpha}\sin\vartheta = 0 \text{ bzw. } -\bar{\beta}\sin\vartheta + \bar{\alpha}\cos\vartheta = 0.$$

Die drei Lösungen können angegeben werden [7]. Mit ihren Randwerten hat man die Ausdrücke

$$\varrho_{i1} = -\bar{\beta}\sin\vartheta + \bar{\alpha}\cos\vartheta \text{ bzw. } \varrho_{i2} = \bar{\beta}\cos\vartheta + \bar{\alpha}\sin\vartheta \qquad (i = 1, 2, 3)$$

zu bilden. Dann müssen die Vorgaben den Randbedingungen

$$\oint \varrho_{i1}\,\delta k ds = 0 \text{ bzw. } \oint \varrho_{i2}\,\delta a ds = 0$$

genügen. In unserm Fall erhält man

$$\oint \delta k ds = 0,\ \oint \delta k \sin\vartheta\, ds = 0,\ \oint \delta k \cos\vartheta\, ds = 0$$

und dieselben Gleichungen für δa.

6. Die Bedingungsgleichungen für δk waren bereits für eine beliebige geschlossene ebene Kurve in der Form aufgestellt worden [8], [9]:

$$\oint \delta k ds = 0,\ \oint \delta k x_1 ds = 0,\ \oint \delta k x_2\, ds = 0.$$

Dagegen war nicht bekannt, daß, wenn die Bedingungen erfüllt sind, auch gewiß eine Lösung existiert. Das vorhergehende Ergebnis gab den Anlaß, zu versuchen, ob die Formeln für δa sich vielleicht auch direkt, also ohne Benutzung der Differentialgleichungstheorie ableiten ließen und den Geltungsbereich zu ermitteln. Die dazu angestellte Rechnung lasse ich hier folgen. Ich bemerke gleich, daß bei δa die erste der drei Formeln in der Tat nur für den Fall eines Kreises abgeleitet werden konnte, die beiden andern gar nur für einen Kreis, längs dessen der Flächenstreifen überall denselben Winkel mit der Kreisebene bildet; mit andern Worten, es handelt sich um einen Rotationsstreifen.

Wir gehen zunächst von der Formel (2) aus

$$\delta a = (\mathfrak{y}'\mathfrak{x}') = (\mathfrak{y}\mathfrak{x}')' - (\mathfrak{y}\mathfrak{x}'').$$

Nun ist

$$\mathfrak{y} \times \mathfrak{x}' = \mathfrak{z}',$$

und durch skalare Multiplikation mit der Binormalen $\mathfrak{b}$ erhält man

$$(\mathfrak{y}\mathfrak{x}'\mathfrak{b}) = (\mathfrak{z}'\mathfrak{b}),$$

das ist

$$-\frac{1}{k}(\mathfrak{y}\mathfrak{x}'') = (\mathfrak{z}'\mathfrak{b}).$$

Daher wird unsere obige Formel

$$\delta a = (\mathfrak{y}\mathfrak{x}')' + k(\mathfrak{z}'\mathfrak{b}).$$

k ist konstant, $\mathfrak{b}$ ein fester Vektor. Durch Integration längs des Kreises erhält man

$$\oint \delta a \, ds = 0.$$

Zur Ableitung der zwei andern Formeln benützen wir die Formel $\mathfrak{y}' = \delta a \, \mathfrak{x}' + \delta b \eta$. Wir multiplizieren sie vektoriell mit der Binormalen und erhalten

$$\mathfrak{y}' \times \mathfrak{b} = -\delta a \, \mathfrak{y} + \delta b \sin\psi \mathfrak{x}'.$$

Hier ist ψ der Winkel zwischen $\mathfrak{b}$ und η; er ist konstant, da es sich um einen Kreis mit sphärischem Streifen handeln soll. Ist jetzt $\mathfrak{e}$ ein Einheitsvektor in der Ebene des Kreises, so folgt

$$(\mathfrak{y}'\mathfrak{b}\,\mathfrak{e}) = -\delta a(\mathfrak{y}\mathfrak{e}) + \delta\mathfrak{b} \sin\psi(\mathfrak{x}'\,\mathfrak{e}).$$

Für einen Kreis kann man, je nach Wahl von $\mathfrak{e}$, aber $(\mathfrak{y}\mathfrak{e}) = \cos\vartheta$ und $(\mathfrak{x}'\mathfrak{e}) = -\sin\vartheta$ setzen oder $(\mathfrak{y}\mathfrak{e}) = \sin\vartheta$ und $(\mathfrak{x}'\mathfrak{e}) = \cos\vartheta$. Beim Integrieren längs des Kreises verschwindet in beiden Fällen das zweite Integral; denn δb unterscheidet sich hier nur um einen konstanten Faktor von δk, und ebenso erhält man auf der linken Seite 0, denn $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{e}$ sind konstante Vektoren. Also folgt

$$\oint \delta a \cos\vartheta \, ds = 0 \text{ und } \oint \delta a \sin\vartheta \, ds = 0.^{3}$$

[3] Ich will hier noch eine andre Ableitung der Formeln für δa angeben, die von Herrn *Grotemeyer* stammt und mir für diese Arbeit zur Verfügung gestellt wurde. Nach seiner Arbeit [9] gilt für isometrische Deformation eines Kreises

$$\oint \delta \varkappa \, ds = 0,$$

wo $\varkappa$ die Torsion bedeutet. Es ist aber nach [3] S. 71

$$\varkappa = a + \varphi'.$$

Hier ist φ der schon im Anfang der Arbeit so bezeichnete Winkel. Daher folgt

$$\oint \delta a \, ds = 0.$$

Für den Beweis der andern Formeln wird zunächst gezeigt, daß für ebene geschlossene Kurven

$$\oint \delta\varkappa \, \mathfrak{y} \, ds = 0$$

gilt. Das folgt aus $\mathfrak{b}' = -\varkappa\mathfrak{y}$ und also $\delta\mathfrak{b}' = -\delta\varkappa \, \mathfrak{y} - \varkappa \, \delta\mathfrak{y}$ wegen $\varkappa = 0$. Setzt man $\varkappa = a + \varphi'$, so erhält man

7. In meiner Arbeit [1] hatte ich gezeigt, daß die Vorgabe von δk bei einer ebenrandigen Kugelkalotte folgendermaßen gelöst werden kann. Man löse zunächst die gewöhnliche Differentialgleichung

$$U_{\vartheta\vartheta\vartheta} + U_\vartheta + \frac{\delta k}{k} = 0$$

für die Randwerte U der Potentialfunktion U, womit die Aufgabe auf die erste Randwertaufgabe der Potentialtheorie für den Kreis zurückgeführt ist. Die infinitesimalen Verbiegungen der Kugel $\frac{1}{1+r^2}(2r\cos\vartheta, 2r\sin\vartheta, 1-r^2)$ sind dann nämlich gegeben in der Form $\mathfrak{z} = (U_\vartheta x_1 + U x_2, U_\vartheta x_2 - U x_1, U_\vartheta x_3 - V)$; V ist die adjungierte Potentialfunktion. Es stellt sich nun heraus, daß die Vorgabe von δa auf genau dieselbe Art behandelt werden kann. Es gilt nämlich

$$V_{\vartheta\vartheta\vartheta} + V_\vartheta + \frac{\delta a}{k^2} = 0. \tag{2d}$$

Zur Bestätigung muß man Formel (2) benützen, also den Drehriß kennen und beachten, daß in (2) Differentiation nach s gemeint ist; es ist aber $\frac{ds}{d\vartheta} = \frac{2r}{1+r^2}$. Der Drehriß kann folgendermaßen dargestellt werden

$$\mathfrak{y} = -\left(r\,U_r + \frac{1-r^2}{1+r^2}\,U\right)\mathfrak{x} - \left(\frac{r(1+r^2)^2}{4}\,U_{rr} + \frac{1+r^2}{2}\,U_r - r\,U\right)\mathfrak{x}_r - \left(\frac{(1+r^2)^2}{4}\,U_{r\vartheta} + \frac{1-r^4}{4r^2}\,U_\vartheta\right)\mathfrak{x}_\vartheta,$$

wie man am einfachsten bestätigt, indem man zeigt, daß damit die Gleichung $d\mathfrak{z} = \mathfrak{y} \times d\mathfrak{x}$ erfüllt ist. Daß die Drehrisse der Kugel, also die Minimalflächen, sich durch eine Potentialfunktion allein und ihre ersten und zweiten Ableitungen darstellen lassen, habe ich schon früher erwähnt. U bedeutet die Variation der geographischen Länge; genauer: hier ist $U = -\delta\vartheta$. Natürlich kann man (1d) und (2d) auch aus (1c) und (2c) gewinnen, da die allgemeinste Form von α und β aus (4) ermittelt werden kann, wenn man $\mathfrak{y}$ kennt.

$$\oint \delta a\, \mathfrak{y}\, ds = -\oint \delta\varphi' \mathfrak{y}\, ds = \oint \delta\varphi\ \mathfrak{y}'\, ds = -\oint k\delta\varphi\, \mathfrak{x}'\, ds$$

(k = Krümmung der Kurve). Nun ist $\delta k = k\,tg\,\varphi\,\delta\varphi$. Handelt es sich um einen Kreis (k = const.) und einen sphärischen Streifen (φ = const.), so erhält man

$$\oint \delta a\, \mathfrak{y}\, ds = \text{const} \oint \delta k \mathfrak{x}' ds = 0.$$

Literatur

[1] *Rembs, E.*: Bemerkungen zur infinitesimalen Flächenverbiegung. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg. Erscheint demnächst.
[2] *Grotemeyer, K. P.*: Zur infinitesimalen und endlichen Verbiegung von Halbeiflächen. Arch. d. Math. **4** (1953) 52—60.
[3] *Blaschke, W.*: Vorlesungen über Differentialgeometrie I. Berlin 1930.
[4] *Rembs, E.*: Unverbiegbare offene Flächen. Sitz. Ber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. (1930) 124—133.
[5] *Haack, W.*: Randwertprobleme höherer Charakteristik für ein System von zwei elliptischen Differentialgleichungen. Math. Nachr. **8** (1952) 123—132.
[6] *Nitsche, Johannes*: Eine charakteristische Eigenschaft der Lösungen von Randwertproblemen elliptischer Differentialgleichungen. Arch. d. Math. **6** (1955) 18—24.
[7] *Nitsche, Joachim*: Ein mit der Verbiegung der Halbkugel verbundenes Randwertproblem. Arch. d. Math. **4** (1953) 331—336.
[8] *Rembs, E.*: Randvorgaben bei infinitesimaler Verbiegung konvexer Flächen. Arch. d. Math. **6** (1955) 55—58.
[9] *Grotemeyer, K. P.*: Integralsätze bei infinitesimaler Verbiegung von geschlossenen Raumkurven. Arch. d. Math. **6** (1955) 250—252.
[10] *Hellwig, G.*: Über die Verbiegung von Flächenstücken mit positiver Gaußscher Krümmung. Arch. d. Math. **6** (1955) 243—249.

Zur Geometrie des harmonischen Umschwungs

Von

Walter Kautny, Wien

Mit 3 Textabbildungen

(*Eingelangt am 11. Oktober 1955*)

„*Harmonischer Umschwung*" wird hier jener spezielle räumliche Bewegungsvorgang genannt, der sich aus einer *Drehung* um eine feste Achse und einer *harmonischen Schwingung* längs dieser Achse zusammensetzt. Zwischen dem Drehwinkel σ und der Schwingstrecke s besteht mithin, wenn eine Mittellage als Nullstellung dient, die Beziehung

$$s = h \,.\, \sin n\sigma; \tag{1}$$

h ist dabei die Amplitude, n die Frequenz der Schwingung. Unter Verwendung eines Systems von Zylinderkoordinaten r, φ, z, dessen z-Achse mit der Drehachse zusammenfällt, wird die Lage eines der Bewegung unterworfenen Punkts $P_0(r_0, \varphi_0, z_0)$ in Abhängigkeit von σ gekennzeichnet durch

$$r = r_0, \quad \varphi = \varphi_0 + \sigma, \quad z = z_0 + h \,.\, \sin n\sigma. \tag{2}$$

Nach Übergang zu kartesischen Koordinaten $x = r \,.\, \cos\varphi$, $y = r \,.\, \sin\varphi$ und z schreiben sich diese Bewegungsgleichungen

$$x = x_0 \,.\, \cos\sigma - y_0 \,.\, \sin\sigma, \; y = x_0 \,.\, \sin\sigma + y_0 \,.\, \cos\sigma, \; z = z_0 + h \,.\, \sin n\sigma. \tag{3}$$

Der zu $n = 1$ gehörige Sonderfall dieser Bewegung ist wohlbekannt: es handelt sich um einen speziellen „*Mannheim-Darboux*schen Umschwung", der insbesondere von *A. Grünwald* ausführlich untersucht worden ist[1]; dieser Bewegungsvorgang ist dadurch bemerkenswert, daß alle mitgenommenen Raumpunkte Ellipsen durchlaufen und alle

[1] *M. A. Mannheim:* Sur le déplacement d'une figure de forme invariable, dont tous les plans passent par des points fixes, J. Ec. Polyt. **60** (1890).

G. Darboux: Sur les mouvements algébriques. Note III in G. Königs: Leçons de Cinématique (Paris 1897), 352.

A. Grünwald: Darstellung der Mannheim-Darbouxschen Umschwungsbewegung eines starren Körpers, Z. Math. Phys. **54** (1906), 154—220.

mitgenommenen Ebenen Drehkegel umhüllen — von leicht zu durchschauenden Ausartungen abgesehen.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist das Studium der zu $n \neq 1$ gehörigen, bisher noch nicht betrachteten allgemeinen Umschwungbewegung, wobei das Augenmerk vor allem den von den mitgenommenen Punkten, bzw. Ebenen erzeugten Bahnkurven, bzw. Hülltorsen gilt. Die von mitgenommenen Geraden erzeugten Strahlflächen sollen hingegen einer zweiten Mitteilung vorbehalten bleiben. Es genügt offenbar, sich auf positive Frequenzwerte zu beschränken, wobei die Bereiche $n < 1$ bzw. $n > 1$ durch die Zusätze „flachgängig", bzw. „steilgängig" unterschieden werden sollen. Besonderes Interesse kommt zweifellos den Annahmen rationaler Frequenzwerte zu, da dieselben geschlossene Umschwünge und algebraische Gebilde bedingen, deren Hauptcharaktere angegeben werden. Ansonsten wird hauptsächlich auf differentialgeometrische Eigenschaften und die konstruktiv-zeichnerische Behandlung der genannten Gebilde eingegangen, wobei manche bemerkenswerten Zusammenhänge aufgedeckt werden. Die Normalprojektion auf die xy-Ebene wird dabei schlechtweg „Grundriß" genannt.

Die Anregung zu der vorliegenden Untersuchung ging von *W. Wunderlich* aus, dem der Verfasser für Rat und Hilfe zu Dank verpflichtet ist.

I. Bahnkurven der Umschwungbewegung

§ 1. Gleichung, Gestalt und Konstruktion der Umschwungkurven

Bei jeder Bewegung, die eine Achse festläßt, sind offenbar die Bahnen aller Punkte eines koachsialen Drehzylinders ($r = \text{const}$) untereinander kongruent; alle übrigen können aus ihnen durch achsiale Streckung abgeleitet werden, sind somit zu ihnen affin.

Bei der Untersuchung einer einzelnen „*Umschwungkurve*" genügt es daher, sich etwa mit der Bahn des Punktes $A\ (a, 0, 0)$ zu befassen. Sie wird gemäß (3) dargestellt durch

$$x = a \cdot \cos\sigma, \quad y = a \cdot \sin\sigma, \quad z = h \cdot \sin n\sigma, \tag{4}$$

oder in Zylinderkoordinaten durch

$$r = a, \qquad \varphi = \sigma, \qquad z = h \cdot \sin n\sigma. \tag{5}$$

Es handelt sich um eine ganz auf dem Drehzylinder $r = a$ verlaufende Kurve, die bei dessen Verebnung in eine *Sinuslinie* übergeht, was eine

gute anschauliche Vorstellung ihres Aussehens vermittelt[2]. Die Umschwungkurven sind im allgemeinen, d. h. für irrationales n, transzendent und bestehen aus unendlich vielen sich periodisch aneinanderreihenden kongruenten Bögen. Auf die bei rationalem n auftretenden geschlossenen und algebraischen Kurven wird in § 7 näher eingegangen.

Im Sonderfall $n = 1$ des *Mannheim-Darboux*schen Umschwungs treten wegen $y/z = a/h$ durchwegs *ebene Bahnen* auf, welche, da sie auf Drehzylindern liegen, *Ellipsen* sind (Abb. 1b).

Zu einer solchen Ellipse gelangt man übrigens auch, wenn man in der Darstellung (5) den Polarwinkel φ durch $n\varphi$ ersetzt. Man erhält daher umgekehrt eine zur Frequenz n gehörige Umschwungkurve, wenn man auf den ebenen Schnitt eines Drehzylinders eine $(1/n)$-fache *„achsiale Winkelzerrung"*

$$\bar{r} = r, \quad \bar{\varphi} = \varphi/n, \quad \bar{z} = z \tag{6}$$

ausübt. Diese einfache — gelegentlich von *E. Müller* eingeführte — Transformation kann zur Konstruktion und zeichnerischen Darstellung der Umschwungkurven dienen. Aus $d\bar{z}/\bar{r}d\bar{\varphi} = n \,.\, dz/rd\varphi$ leitet sich eine bequeme *Tangentenkonstruktion* ab: Für zugeordnete Punkte der Ellipse und der Umschwungkurve erscheinen korrespondierende Tangentenstrecken im Grundriß im Längenverhältnis $n:1$ (Abb. 1).

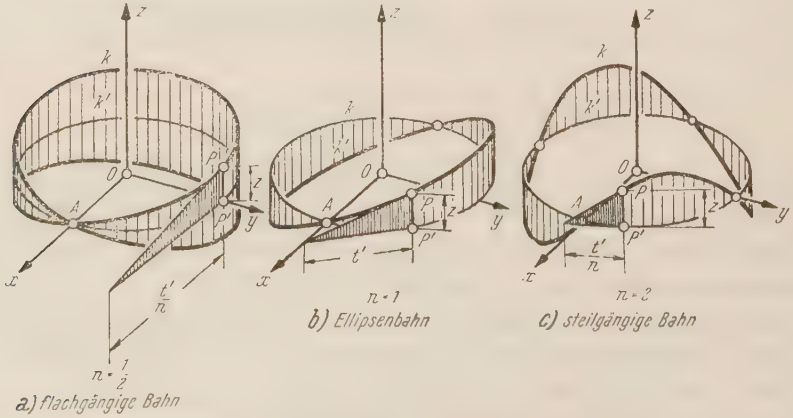

Abb. 1 Charakteristische Formen der Umschwungbahnen

[2] Solche Umschwungkurven sind gelegentlich auf den Walzen gewisser Registrierinstrumente zu beobachten, wenn nämlich der aufgezeichnete Vorgang eine reine Sinusschwingung ist; auch die Garnlagen der sogenannten Kreuzspulen stellen ein geläufiges Beispiel dar.

O. Danzer fand Umschwungbahnen bei der Suche nach jenen Raumkurven, die sich zyklographisch auf ein Kurvenpaar abbilden, das aus einer Epi- und einer

§ 2. Tangentenleitquadrik

Für die Differentialeigenschaften zweiter Ordnung wichtig ist die Existenz einer mit jeder Umschwungbahn verbundenen „*Leitquadrik*", eines koachsialen Drehhyperboloids, das von sämtlichen Tangenten der Umschwungkurve berührt wird.

Zum Nachweis dieser Leitfläche betrachten wir die durch (4) dargestellte Umschwungkurve k. Ihre zum Parameterwert σ gehörige Tangente t berührt den Trägerzylinder $\Lambda(r=a)$ im Punkt $P(x, y, z)$ und hat die Richtung $dx:dy:dz = -a\sin\sigma : a\cos\sigma : nh\cos n\sigma$. Bei Rotation um die Achse erzeugt t das durch Kehl- und Fernkreis leicht festzulegende Drehhyperboloid

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{(z-h\,.\sin n\sigma)^2}{(hn\,.\cos n\sigma)^2} = 1 \tag{7}$$

Die allen möglichen σ-Werten zugeordneten Hyperboloide liefern als Hüllgebilde – durch Elimination von σ aus (7) und der Ableitung nach σ — neben dem Trägerzylinder Λ die gesuchte Leitfläche Λ mit der Gleichung

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{n^2\,.\,h^2} = \frac{n^2-1}{n^2}. \tag{8}$$

Dieses Leithyperboloid ist einschalig für „steile" Umschwungkurven ($n > 1$), zweischalig für „flache" und artet im Grenzfall $n = 1$ zu einem Drehkegel aus[3]. Konstruktiv läßt es sich unschwer ermitteln, wenn man beachtet, daß es die beiden Scheitelkreise $r = a$, $z = \pm h$ der Umschwungkurve enthält und daß deren steilste Tangenten es im Unendlichen berühren, also die Öffnung des Asymptotenkegels anzeigen.

Die *Schmiegebene* der Umschwungkurve k im Punkt P ist nun identisch mit jener Berührebene des Leithyperboloids Λ, welche die Tangente t von P enthält, und auf diese Weise auch konstruierbar. Als Schnitt der Schmiegebene mit der zum Linienelement (P, t) gehörigen *Meusnier-*

Hypozykloide mit gemeinsamen Spitzen besteht; vgl. „Über Kurven, die sich zyklographisch als Zykloiden abbilden", Mh. Math. Phys. **22** (1911), 170ff.

W. Wunderlich gelangt zu Umschwungkurven bei der Projektion der auf einem Torusring verlaufenden Loxodromen aus irgendeinem Achsenpunkt auf einen koachsialen Drehzylinder; vgl. „Über die Torusloxodromen", Math. Mh. **56** (1952), 313—334 (vgl. insbes. Abb. 4).

[3] Ausgehend von diesem unmittelbar klaren Leitkegel im Falle $n = 1$, lassen sich Existenz und Abmessungen der Leitquadrik im allgemeinen Fall auch rein geometrisch herleiten.

Kugel des Trägerzylinders der Umschwungkurve läßt sich schließlich auch der *Krümmungskreis* von k ermitteln.

§ 3. Zusammenhang der Umschwungkurven mit den Drehkegelgeodätischen

Eine *Kollineation*, die die Leitquadrik Λ in eine *Kugel* Λ^* und gleichzeitig den Trägerzylinder Δ in einen mit Λ^* *konzentrischen Drehkegel* Δ^* überführt, verwandelt die Umschwungkurve k in eine *geodätische Linie* k^* von Δ^*: Verebnet man nämlich den Kegelmantel, so geht k^* in eine ebene Linie über, deren Tangenten von der Kegelspitze die durch den Kugelradius gegebene feste Entfernung haben, also in eine Gerade fallen müssen, da der Fall eines Parallelkreises ohne weiteres ausscheidet.

Eine Kollineation, die den genannten Forderungen genügt, kann nur für $n < 1$ reell sein (Λ = zweischaliges Hyperboloid). Angeführt sei speziell die involutorische Zentralkollineation

$$x^* = \frac{bx}{z}, \quad y^* = \frac{by}{z}, \quad z^* = \frac{b^2}{z} \quad \text{mit} \quad b^2 = \frac{1 - n^2}{n^2} \cdot a^2 \tag{9}$$

Dieselbe transformiert die durch (4) dargestellte Umschwungkurve in die *Drehkegelgeodätische*

$$x^* = \frac{ab \cdot \cos \sigma}{h \cdot \sin n\sigma}, \quad y^* = \frac{ab \cdot \sin \sigma}{h \cdot \sin n\sigma}, \quad z^* = \frac{b^2}{h \cdot \sin n\sigma}. \tag{10}$$

Dieser Zusammenhang mit einer sehr geläufigen Kurvengattung eröffnet eine weitere Möglichkeit zur konstruktiven Behandlung der Umschwungkurven.

So kann etwa aus der bekannten Tatsache, daß die Berührungslinie l^* der Tangentenfläche von k^* mit der Kugel Λ^* eine *Böschungslinie* (*sphärische Kreisevolvente*) ist, die im Grundriß als Epizykloide erscheint, zurückgeschlossen werden, daß die Berührungslinie l der Tangentenfläche von k mit der Leitquadrik Λ eine „*projektive Böschungslinie*" ist, deren sämtliche Tangenten einen gewissen Kreis in der Mittelebene $z = 0$ treffen[4] und die sich bei Zentralprojektion aus dem Ursprung auf eine achsennormale Ebene als Epizykloide abbildet.

[4] Vgl. etwa: *F. Fabricius-Bjerre:* „Über projektive Böschungslinien auf Flächen 2. Ordnung", Danske Vid. Selsk., Mat. fys. Medd. **25** (1950), 3—21.
W. Wunderlich: „Beispiele für das Auftreten projektiver Böschungslinien auf Quadriken", Mat. Tidsskrift, B (1951), 9—26.

§ 4. Nichteuklidische Deutungen der Umschwungkurve

Im Rahmen einer nichteuklidischen Geometrie *Cayley-Klein*scher Prägung, deren Maßquadrik Γ die beiden Scheitelkreise der Umschwungkurve k enthält, sind der Trägerzylinder Δ und die Leitfläche Λ als „konzyklisch" anzusprechen, da sie in den gemeinsamen Tangentialebenen des Scheitelkreispaares gemeinsame Kreisschnittebenen haben. Eine den Zylinder Δ längs einer Erzeugenden e berührende Ebene ε schneidet aus Γ und Λ zwei Kegelschnitte c und d heraus, die einander in den absoluten Punkten von e berühren. Die zu einem Punkt P von e gehörige Umschwungtangente t berührt den „Kreis" d und schneidet dessen „Mittellinie" e unter einem konstanten Winkel α: Im Sinne der in ε herrschenden, auf c basierenden Metrik sind nämlich sowohl d als auch e als Bahnkurven einer „Drehung" (um den absoluten Pol von e) anzusehen, bei welcher der Winkel α unveränderlich bleibt. Da Δ in der durch Γ eingeführten (hyperbolischen) Geometrie als „Drehkegel" zu bezeichnen ist, kann somit die Umschwungkurve k als *nichteuklidische* (*hyperbolische*) *Drehkegelloxodrome* (mit dem Kurswinkel α) aufgefaßt werden.

Eine ganz andere Auffassung ergibt sich hingegen, wenn man eine nichteuklidische Metrik einführt, in der die Leitfläche Λ als „Kugel" anzusehen ist. In diesem Fall muß Λ die Maßquadrik Γ längs eines Kegelschnittes berühren; dessen Ebene β ist die „Mittelebene", ihr Pol B bezüglich Γ der „Mittelpunkt". Sämtliche Tangenten einer Kugel haben von ihrem Mittelpunkt gleichen Abstand, und dual dazu sind sie gegen die Mittelebene gleich geneigt. Die Umschwungkurve k — wie jede andere Kurve, deren sämtliche Tangenten die Kugel Λ berühren — kann demnach insofern als *nichteuklidische Böschungslinie* aufgefaßt werden, als ihre Tangenten gegen die Mittelebene β feste Neigung aufweisen; sie ist aber auch *geodätische Linie* auf dem Projektionskegel aus der Kugelmitte B, weil ihre Schmiegebenen (= Tangentialebenen von Λ) auf den zugehörigen Kegeltangentialebenen (= Durchmesserebenen von Λ) nichteuklidisch senkrecht stehen.

§ 5. Parallelprojektion der Umschwungkurve

Zur Untersuchung der *Parallelprojektionen* einer Umschwungkurve k empfiehlt es sich, an Stelle der Normalform (4) eine um den Winkel α verdrehte Lage

$$x = a.\cos(\sigma + \alpha), \quad y = a.\sin(\sigma + \alpha), \quad z = h.\sin n\sigma \tag{11}$$

heranzuziehen.

Zunächst werde der *Schrägriß auf eine achsennormale Ebene* betrachtet. Es genügt dabei, die Projektionsrichtung parallel zur xz-Ebene anzunehmen (Abb. 2). Bezeichnet β den Einfallswinkel gegen die xy-Ebene

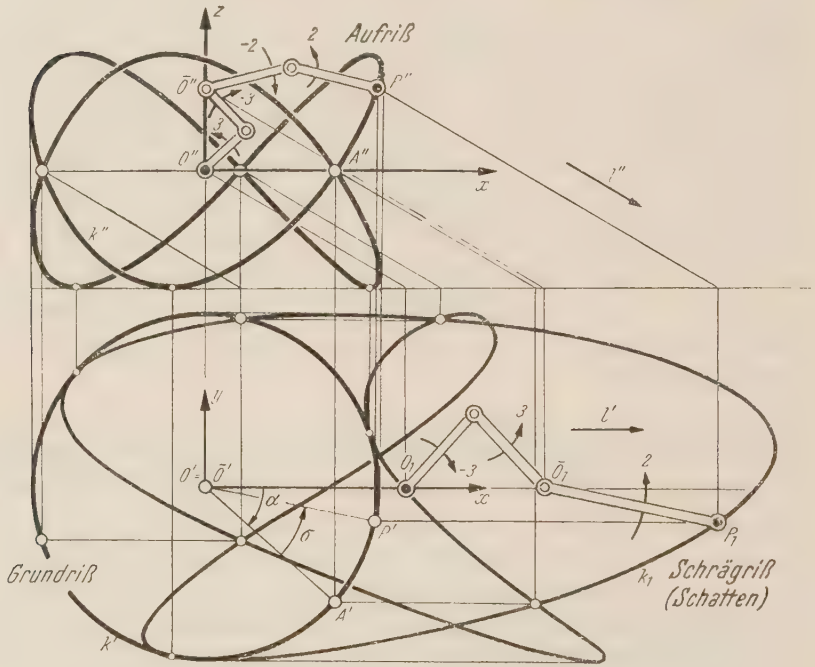

Abb. 2. Grundriß, Aufriß und Schrägriß einer Umschwungbahn ($n = 3/2$).

und wird zur Abkürzung $h.\operatorname{ctg}\beta = b$ gesetzt, so wird die in der xy-Ebene entstehende Bildkurve k_1 beschrieben durch

$$\begin{aligned} x' &= x + z.\operatorname{ctg}\beta = a.\cos(\sigma + \alpha) + b.\sin n\sigma \\ y' &= y \qquad\qquad\quad = a.\sin(\sigma + \alpha). \end{aligned} \tag{12}$$

Übergang zur komplexen Darstellung vermöge $\mathfrak{z}' = x' + iy'$ führt auf die Ortsgleichung

$$\mathfrak{z}' = a.e^{i\alpha}.e^{i\sigma} - \frac{bi}{2} \cdot e^{in\sigma} + \frac{bi}{2} \cdot e^{-in\sigma}, \tag{13}$$

welche erkennen läßt, daß es sich bei der Bildkurve k_1 für $n \neq 1$ um eine *Radlinie 3. Stufe* der Sippe $1:n:-n$ handelt[5].

Als Nächstes sei der *Normalriß auf eine achsenparallele Ebene* betrachtet, wobei man sich etwa auf die xz-Ebene beschränken kann. Die in diesem „Aufriß" auftretende Bildkurve k'' wird durch die erste und dritte Gleichung (11) beschrieben und ist damit als *Lissajoussche Kurve* zu erkennen[6]. Übergang zur komplexen Darstellung vermöge $\mathfrak{z}'' = x + iz$ liefert die Ortsgleichung

$$\mathfrak{z}'' = \frac{1}{2}\, a e^{i\alpha} \cdot e^{i\sigma} + \frac{1}{2}\, a e^{-i\alpha} \cdot e^{-i\sigma} + \frac{h}{2}\, e^{in\sigma} - \frac{h}{2}\, e^{-in\sigma} \tag{14}$$

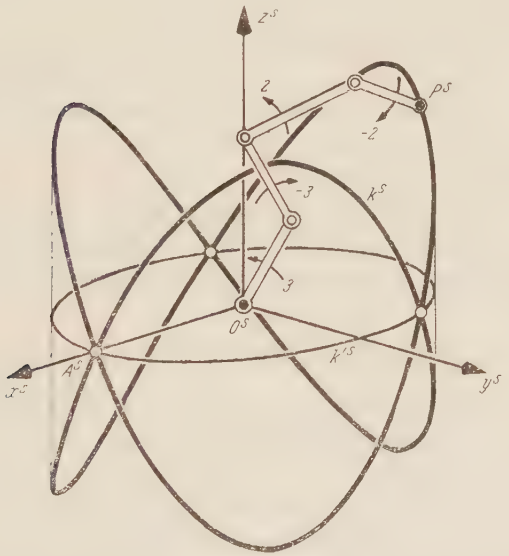

Abb. 3. Axonometrische Darstellung einer Umschwungbahn ($n = 3/2$).

[5] Nach *W. Wunderlich*, „Höhere Radlinien", Öst. Ing. Arch. 1 (1946), 277–296, wird die Bahnkurve des Endpunktes eines s-gliedrigen Polygonzuges, dessen Seiten bei festgehaltenem Anfangspunkt mit verschiedenen konstanten Geschwindigkeiten rotieren, als „Radlinie s-ter Stufe" bezeichnet. Im vorliegenden Fall ist $s = 3$ und die drei mit den Geschwindigkeiten 1, n und $-n$ rotierenden Polygonseiten sind in der Nullstellung durch die Ortsvektoren der Punkte $a \cdot e^{i\alpha}$, $-bi/2$ und $bi/2$ in der Gaußschen Zahlenebene gekennzeichnet.

[6] Vgl. etwa *G. Loria-F. Schütte:* Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven (Leipzig 1910), 1, 482. Die *Lissajous*schen Kurven sind als Bahn eines Punktes, der gleichzeitig zwei harmonischen Schwingungen in zueinander normalen Richtungen unterworfen ist, wohlbekannt.

und ordnet die Lissajouskurve für $n \neq 1$ unter die Radlinien 4. Stufe der Sippe 1:—1:n:—n ein (Abb. 2).

Die *Parallelprojektion auf eine beliebige Ebene* wird nun im allgemeinen – nämlich solange die Projektionsstrahlen schräg zur Achse verlaufen – zu einer Radlinie 3. Stufe der vorhin betrachteten Art *affin* sein. Für den Fall, daß die Sehstrahlen normal zur Achse sind, entsteht hingegen eine affine Lissajouskurve. Da in jedem Fall die komplexe Darstellung der Bildkurve in einer Linearkombination der Funktionen $\cos(\sigma + \alpha)$, $\sin(\sigma + \alpha)$ und $\sin n\sigma$ besteht, enthält sie nur die Potenzen $e^{i\sigma}$, $e^{-i\sigma}$, $e^{in\sigma}$ und $e^{-in\sigma}$, woraus hervorgeht, daß auch die allgemeinste Parallelprojektion einer Umschwungkurve (für $n \neq 1$) eine *Radlinie 4. Stufe* der Sippe 1:—1:n:—n ist (Abb. 3).

§ 6. Zentralprojektion der Umschwungkurve

Unter den *Zentralprojektionen* der Umschwungkurve sind nur jene bemerkenswert, die aus einem Achsenpunkt $Z(0, 0, c)$ auf eine achsennormale Ebene $z = \text{const}$ erfolgen.

Wählt man im allgemeinen Falle $c \neq 0$ die Bildebene $z = 0$, so läßt sich die Polargleichung der Bildkurve der in der Normalform (4) angesetzten Umschwungkurve sofort hinschreiben mit

$$r = \frac{ac}{c - z} = \frac{ac}{c - h \sin n\sigma} \,. \tag{15}$$

Es handelt sich offensichtlich um einen bezüglich seines im Ursprung liegenden Brennpunkts $(1/n)$-fach *winkelgezerrten Kegelschnitt*, der eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist, je nachdem $|c| \gtreqless |h|$ ist.

Entscheidet man sich im Sonderfall $c = 0$ — Projektion aus dem Ursprung – für die Bildebene $z = h$, so lautet die Polargleichung der Bildkurve

$$r = \frac{ha}{z} = \frac{a}{\sin n\sigma} \,. \tag{16}$$

Diesmal liegt eine um den Nullpunkt $(1/n)$-fach winkelgezerrte Gerade vor, eine unter dem Namen *Ährenkurve* bekannte Linie[7]. Die zu $n < 1$ gehörigen Ährenkurven sind als Grundrißprojektionen von geodätischen Linien auf dem Drehkegel geläufig, was in unmittelbaren Zusammenhang mit der in § 3 gemachten Bemerkung gebracht werden kann.

[7] Vgl. etwa *H. Wieleitner:* Spezielle ebene Kurven (Sammlung Schubert, Leipzig 1908), 124
oder *G. Loria-F. Schütte:* Spez. algebr. u. transz. ebene Kurven 1, 367.

§ 7. Algebraische Unterschwungkurven

Abschließend soll auf die zu *rationalen Frequenzen* gehörigen geschlossenen Umschwünge näher eingegangen werden, die sich durch *algebraische Bahnkurven* auszeichnen.

Schreibt man in einem solchen Fall die (wie bisher positiv vorausgesetzte) Frequenz als gekürzten Bruch an:

$$n = \frac{\lambda}{\mu} \quad (\lambda, \mu > 0, \text{ ganz, teilerfremd}), \tag{17}$$

dann gibt der Zähler λ die Anzahl der Schwingungsperioden und μ die Anzahl der Umläufe um die Achse an, die ein Punkt vollführt, bis er zum ersten Male wieder in seine Ausgangslage zurückkehrt. Der Verlauf der geschlossenen Umschwungbahnen ist durch diese beiden Zahlen qualitativ ausreichend gekennzeichnet.

Führt man nun den neuen (komplexen) Parameter

$$u = e^{i\sigma/\mu} \tag{18}$$

ein, so erhält die Bahngleichung (4) die nachstehende rationale Form

$$x = \frac{a}{2}(u^{\mu}+u^{-\mu}), \quad y = \frac{a}{2i}(u^{\mu}-u^{-\mu}), \quad z = \frac{h}{2i}(u^{\lambda}-u^{-\lambda}). \tag{19}$$

Hieraus ist zu ersehen, daß die Umschwungkurven *rational-algebraisch* sind und die *Ordnung*

$$N = 2.\max(\lambda, \mu) \tag{20}$$

besitzen[8].

Damit kündet sich ein grundsätzlich verschiedenes Verhalten der „flachen" und der „steilen" Umschwungkurven im Unendlichen an:

Für die *flachgängigen* Umschwungkurven ist $n < 1$, also $\lambda < \mu$. Die Ebenen des Parallelbüschels $z = \text{const}$ liefern mit der Umschwungkurve gemäß (19) nur 2λ eigentliche Schnittpunkte; das Defizit von $N - 2\lambda = 2(\mu - \lambda)$ Punkten ist in jenen beiden Punkten zu suchen, die sämtliche Büschelebenen mit dem Trägerzylinder der Kurve gemeinsam haben, das sind die absoluten Punkte der xy-Ebene.

Für die *steilgängigen* Umschwungkurven ist $n > 1$, also $\lambda > \mu$. Hier liefern die Ebenen $z = \text{const}$ die volle Anzahl $N = 2\lambda$ von Schnittpunkten, hingegen tritt für die Ebenen des Achsenbüschels $x/y = \text{const}$

[8] Für die *Klasse*, das ist die Anzahl der durch einen gegebenen Raumpunkt gehenden Schmiegebenen, findet man unschwer den Wert $M = 2.(\lambda + \mu)$.

ein Defizit von $N - 2\mu = 2(\lambda - \mu)$ Punkten auf, die im Fernpunkt der Achse zu suchen sind.

Zusammenfassend ist mithin festzustellen, daß die *Fernpunkte* der Umschwungbahnen durch die Parameterwerte $u = 0$ und $u = \infty$ gekennzeichnet werden; sie sind im flachgängigen Fall in den beiden absoluten Punkten der achsennormalen Stellung zusammengerückt, von denen jeder einen $(\mu - \lambda)$-fachen Kurvenpunkt abgibt, während sie im steilgängigen Fall allesamt im Fernpunkt der Achse vereinigt sind, der einen $2(\lambda - \mu)$-fachen Kurvenpunkt darstellt. Die zugehörigen Tangenten sind in beiden Fällen mit den uneigentlichen Zylindererzeugenden, also den Ferngeraden der Minimalebenen $x \pm iy = 0$ identisch.

Um die Anzahl der *Doppelpunkte* einer zur Frequenz $n = \lambda/\mu$ gehörigen Umschwungkurve zu ermitteln, denke man sich deren Trägerzylinder, als Druckwalze ausgebildet, μ-mal auf einem Stück Papier abgewälzt: der Abdruck der Umschwungkurve besteht dann aus μ Sinuslinien, deren jede λ Perioden hat. Da je zwei von den μ Sinuslinien innerhalb einer Periode einander zweimal schneiden, hat der Abdruck insgesamt $\binom{\mu}{2} . 2\lambda = \lambda . \mu . (\mu - 1)$ Doppelpunkte. Die Anzahl der gesuchten Doppelpunkte der Umschwungkurve, d. i. die Anzahl der Doppelpunkte für einen Walzenabdruck, ist demnach $\lambda . (\mu - 1)$.

Die einfachsten Annahmen — abgesehen vom schon erwähnten *Mannheim-Darboux*schen Umschwung ($n = 1$) mit Ellipsenbahnen — ergeben sich für $n = 2$ und $n = 1/2$ und weisen Bahnkurven 4. Ordnung auf (vgl. Abb. 1a u. 1c). Die zu $n = 2$ gehörigen steilgängigen Umschwungbahnen haben den Achsenfernpunkt als isolierten Doppelpunkt; man findet sie als Randkurven bekannter Fadenmodelle des Plückerkonoids $z = h \sin 2\sigma$ oder des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids $cz = xy$, die durch koachsiale Drehzylinder abgeschnitten sind[9]. Die bei der Annahme $n = 1/2$ auftretenden flachgängigen Umschwungbahnen erweisen sich als sphärische Raumkurven mit einem eigentlichen Doppelpunkt, die gelegentlich „Hippopeden" genannt wurden[10]; sie sind affin zum wohlbekannten „Vivianischen Fenster", das sich für $h = 2a$ einstellt.

[9] Diese Kurven stellen, nebenbei bemerkt, für das genannte Paraboloid Isophoten (Lichtgleichen) bei z-paralleler Beleuchtung dar. Durch jede dieser Kurven gehen zwei kongruente parabolische Zylinder.

[10] *G. Loria:* Curve sghembe speciali (Bologna 1925), 1, 199.

II. Umschwungtorsen

§ 8. Analytische Darstellung, Gratlinie und Schichtenlinien

Unterwirft man eine Ebene ε der Umschwungbewegung, so überstreicht sie eine *Umschwungtorse* Θ. Da gegen die z-Achse gleichgeneigte Ebenen offenbar kongruente Umschwungtorsen einhüllen, kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit als Ausgangslage die Ebene ε_0

$$x + cz = 0 \quad \text{mit } c > 0$$

voraussetzen. Nach Ablauf des Umschwungwinkels σ hat sich ihr Normalenvektor $(1, 0, c)$ nach $(\cos\sigma, \sin\sigma, c)$ gedreht und ihr Achsenschnittpunkt $(0, 0, 0)$ nach $(0, 0, h \sin n\sigma)$ verschoben, so daß die allgemeine Lage der Ebene ε dargestellt wird durch

$$x \cos\sigma + y \sin\sigma + cz = ch \sin n\sigma. \tag{21}$$

Die durch Ableitung nach σ erklärte Ebene $\dot{\varepsilon}$

$$-x \sin\sigma + y \cos\sigma = cnh \cos n\sigma \tag{22}$$

schneidet aus ε die Berührungslinie e mit der von den Ebenen ε eingehüllten Torse Θ aus. Die durch nochmalige Ableitung nach σ gewonnene Ebene $\ddot{\varepsilon}$

$$x \cos\sigma + y \sin\sigma = cn^2 h \sin n\sigma \tag{23}$$

enthält schließlich den Gratpunkt E von ε, dessen Koordinaten sich durch Auflösung der drei Gleichungen (21), (22) und (23) ergeben mit

$$\begin{aligned} x &= cnh(n \sin n\sigma . \cos\sigma - \cos n\sigma . \sin\sigma) \\ y &= cnh(n \sin n\sigma . \sin\sigma + \cos n\sigma . \cos\sigma) \\ z &= h(1 - n^2) \sin n\sigma. \end{aligned} \tag{24}$$

Da sämtliche Ebenenlagen gegen die xy-Ebene gleich geneigt sind, ist Θ eine *Böschungstorse* und ihre *Gratlinie* eine *Böschungslinie*.

Der *Grundriß der Gratlinie*, der durch die beiden ersten Gleichungen (24) bestimmt ist, läßt sich, wie eine einfache Umformung zeigt, in komplexer Schreibweise durch

$$\mathfrak{z} = x + iy = \frac{i}{2} chn . [(1 - n)\, e^{(n+1)\,i\sigma} + (n + 1)\, e^{(1-n)\,i\sigma}] \tag{25}$$

darstellen, woraus zu ersehen ist, daß es sich dabei um eine *gewöhnliche Radlinie* (2. Stufe) der Sippe $(1 + n):(1 - n)$ handelt. Daß diese Radlinie insbesondere eine *Zykloide* ist, ist zwar durch Rechnung leicht zu

bestätigen, jedoch deutlicher aus einer rein geometrischen Überlegung sofort zu erkennen: Der Grundriß der Gratlinie wird ja von dem durch (22) gegebenen Grundriß e' der Erzeugenden e eingehüllt. Wie aus der Gleichung zu entnehmen ist, vollführt e' eine gleichförmige Drehung um die Achse, der sich gleichzeitig eine harmonische Schwingung symmetrisch zum Ursprung überlagert. Aus den Elementen der Kinematik weiß man nun, daß auch jeder Durchmesser eines Kreises, der auf einem festen Kreis abrollt, einer solchen Bewegung unterworfen ist, wobei er eine Zykloide einhüllt.

Aus der Sippencharakteristik $(1 + n):(1 - n)$ ist zu ersehen, daß diese Radlinie im Fall eines flachgängigen Umschwungs eine Epizykloide, im Fall des steilgängigen Umschwungs hingegen eine Hypozykloide ist.

Die *Spitzen der Gratlinie* gehören natürlich zu den stationären Höhenlagen ($z' = 0$) der Ebene, sind also durch $\cos n\sigma = 0$ gekennzeichnet.

Eine bemerkenswert einfache Aussage läßt sich über den *Ort der Gratpunkte in der bewegten Ebene* machen. Prägt man der dem Umschwung unterworfenen Ebene ε ein rechtwinkeliges Koordinatensystem (ξ, η) in der Weise auf, daß in der Ausgangsstellung die positive η-Achse mit der positiven y-Achse zusammenfällt und die positive ξ-Achse ihren Grundriß in der positiven x-Achse hat, so gilt in jedem Augenblick

$$\begin{aligned} \xi . \cos\beta &= \quad x . \cos\sigma + y . \sin\sigma \\ \eta \quad &= -x . \sin\sigma + y . \cos\sigma \end{aligned} \qquad \text{mit } \cot\beta = c. \tag{26}$$

Für den gesuchten Ort der Gratpunkte in der bewegten Ebene ε erhält man dann aus (24) und (26) die Darstellung

$$\xi = \frac{hcn^2}{\cos\beta} \cdot \sin n\sigma, \; \eta = hcn . \cos n\sigma. \tag{27}$$

Es handelt sich demnach um eine *Ellipse*, deren Mitte auf der Umschwungachse liegt und die genau n-mal durchlaufen wird, wenn σ ein Intervall der Länge 2π durchläuft.

Im Hinblick auf die konstruktive Behandlung der Umschwungtorse ist es von Interesse, jene *Drehfläche* zu bestimmen, auf der die Gratlinie verläuft. Zu diesem Zweck wird man aus den beiden ersten Gleichungen (24) $x^2 + y^2 = f(\sigma)$ bilden und daraus und aus der dritten Gleichung den Parameter σ eliminieren. Man findet für $n \neq 1$

$$\frac{x^2 + y^2}{(hcn)^2} + \frac{z^2}{h^2(1 - n^2)} = 1 \tag{28}$$

und erkennt, daß die *Gratlinien* der Umschwungtorsen *Böschungslinien auf Flächen 2. Ordnung* sind, und zwar auf Drehellipsoiden im Fall des flachgängigen Umschwungs, auf einschaligen Drehhyperboloiden hingegen im Fall des steilgängigen[11].

Für den Sonderfall des *Mannheim—Darboux*schen Umschwungs ($n = 1$) artet die Gratlinie in den Punkt $(0, chn, 0)$ aus und die Ebenen ε hüllen den *Drehkegel*

$$x^2 + (y - chn)^2 - c^2z^2 = 0$$

ein.

Die Grundrisse der *Schichtenlinien* einer Böschungstorse sind bekanntlich Parallelkurven, die den Grundriß der Gratlinie zur gemeinsamen Evolute haben[12]. Da dieser Grundriß bereits als Zykloide erkannt wurde, sind also die Schichtenliniengrundrisse als Evolventen dieser Zykloide *Parallelkurven einer* (ähnlichen) *Zykloide* und somit *zykloidale Radlinien 3. Stufe*[13].

§ 9. Konstruktive Behandlung der Umschwungtorse

Für die konstruktive Behandlung der Umschwungtorsen empfiehlt es sich, soweit es sich um Differentialeigenschaften 1. Ordnung handelt, den Umschwung in jedem Augenblick durch die *Momentanschraubung* zu ersetzen, d. i. jene Schraubung, deren Achse mit der Bewegungsachse zusammenfällt und deren Parameter den (zeitlich veränderlichen) Wert

$$p = dz/d\sigma = hn \cdot \cos n\sigma$$

hat. Hierbei wird man sich mit Vorteil der von *Th. Schmid* in die darstellende Geometrie der Schraubung eingeführten *Drehfluchten*[14] bedienen.

Die zum Parameter σ gehörige *Erzeugende* e der von der Ebene ε eingehüllten Umschwungtorse ist danach als Erzeugende der von ε

[11] Die Böschungslinien auf Drehquadriken mit lotrechter Achse wurden zum ersten Male von *W. Blaschke* betrachtet, der insbesondere gezeigt hat, daß ihre Grundrisse Zykloiden sind: „Bemerkungen über allgemeine Schraublinien". Mh. Math. Phys. **19** (1908), 188ff.

[12] Siehe etwa: *E. Müller-E. Kruppa:* Lehrbuch der darstellenden Geometrie (Leipzig 1936), 89.

[13] *W. Wunderlich:* „Höhere Radlinien", Öst. Ing. Arch. **1** (1946), 288.

[14] Zum *Drehfluchtpunkt* einer Geraden g gelangt man, indem man durch den „Augpunkt" $C(0, 0, p)$ die Parallele zu g legt und deren Schnittpunkt mit der Grundebene $z = 0$ einer positiven Viertelschwenkung um den Ursprung unterwirft; analog ist auch die *Drehfluchtspur* einer Ebene erklärt. Vgl. *Th. Schmid:* Darstellende Geometrie II (Sammlung Schubert, Berlin 1922), 225—227.

während der zugeordneten Ersatzschraubung eingehüllten Schraubtorse sofort zu finden: Ihr Grundriß e' fällt mit der Drehfluchtspur der Ebene ε zusammen. Da der für die Konstruktion der Fluchtspur maßgebende Augpunkt $C(0, 0, p)$ auf der z-Achse harmonisch um den Ursprung als Nullpunkt schwingt, führt auch die Drehfluchtspur von ε eine harmonische Schwingung symmetrisch zum Ursprung aus, der sich noch die gleichförmige Drehung um den Ursprung überlagert. Der Grundriß der Gratlinie ist somit als Hüllkurve dieser sich drehenden und schwingenden Geraden e' eine gewöhnliche Zykloide, womit ein im vorigen Abschnitt analytisch gefundenes Ergebnis rein geometrisch bestätigt wird.

Zur Erfassung der *Gratpunkte* mag man sich auf die im vorangegangenen Abschnitt gefundene Trägerquadrik der Gratlinie stützen. Diese hat die Umschwungachse zur Drehachse und ist eindeutig durch zwei ausgezeichnete Lagen der schwingenden Ebene bestimmt: Eine Mittellage (etwa für $\sigma = 0$) und die zugehörige, nach der eben angegebenen Methode zu findende Erzeugende e_0 liefern den Äquatorkreis, der e_0 in dem der z-Achse am nächsten liegenden Punkt treffen muß (Radius $r_0 = p(0).\cot\beta = hnc$); eine Grenzlage (etwa für $\sigma = \pi/2n$) stellt eine Tangentialebene der Drehquadrik dar, deren Berührungspunkt sich leicht angeben läßt. Bei Kenntnis dieser Quadrik sind dann auch allgemeine Gratpunkte als Berührungspunkte der Erzeugenden mit der Quadrik einfach zu konstruieren: Mit Rücksicht auf die feste Neigung der Erzeugenden gegen die xy-Ebene teilt der Gratpunkt die von dem achsenparallelen Tangentialzylinder der Quadrik abgeschnittene Erzeugendenstrecke im konstanten Verhältnis $n/(n-1)$, das in der Grenzlage aufscheinen muß.

Der *Grundriß der Gratlinie* läßt sich auch direkt als Zykloide durch Kreisrollung erzeugen: Der Scheitelkreis dieser Zykloide fällt offenbar mit dem Äquator ($r_0 = hnc$) der Trägerquadrik zusammen. Der die Spitzen tragende konzentrische Fixkreis der Kreisrollung hat den leicht zu ermittelnden Radius $r_1 = hcn^2$, sodaß der Rollkreisdurchmesser mit $2\,r_2 = r_0 \pm r_1 = hcn(1 \pm n)$ anzugeben ist.

Der *Krümmungskreis* in einem Punkt der Gratlinie liegt in der zugehörigen Ebene ε, die ja Schmiegebene der Gratlinie ist, und kann entweder als Schnitt von ε mit der *Meusnier*kugel der Trägerquadrik oder aber mit Hilfe des leicht angebbaren Krümmungskreises der Grundrißzykloide konstruiert werden.

§ 10. Ein Satz von Blaschke

W. Blaschke bewies gelegentlich[11] folgenden Satz: Jede mit dem begleitenden Dreikant einer auf einer Drehquadrik mit lotrechter Achse verlaufenden Böschungslinie l fest verbundene Ebene umhüllt bei der Bewegung des Dreikants längs l eine Torse, deren Grat eine gleichartige und koachsiale Böschungslinie ist. Die mitgenommene Ebene darf dabei natürlich weder parallel noch normal zur Achse sein.

Blaschkes Beweisführung zieht unter anderem Begriffe der sogenannten natürlichen Geometrie heran und ist ziemlich verwickelt. Ein sehr durchsichtiger Beweis läßt sich nun auf Grund der hier dargelegten kinematischen Erzeugung der in Rede stehenden Böschungslinien führen.

Für einen Beobachter in der Ebene ε durchläuft der Gratpunkt E eine Ellipse mit der Frequenz n (vgl. § 8). Die Spur der mit dem begleitenden Dreikant starr verbundenen Ebene $\bar{\varepsilon}$ vollführt daher in ε eine harmonische Schwingung gleicher Frequenz. Wegen des konstanten Winkels $\sphericalangle \varepsilon\bar{\varepsilon}$ führt auch der Achsenschnittpunkt von $\bar{\varepsilon}$ eine solche Schwingung aus, der sich dann für einen Beobachter im ruhenden System noch die gleichartige Schwingung der Ebene ε selbst überlagert. Die Ebene $\bar{\varepsilon}$ dreht sich also, wie ε, gleichförmig um die z-Achse und ist gleichzeitig einer harmonischen (Summen-)Schwingung der Frequenz n in Richtung dieser Achse unterworfen, wenn man von einer Verschiebung der Ebene in sich selbst absieht: Ihre Hülltorse und deren Gratlinie sind somit von derselben Art wie die Umschwungtorse und deren Gratlinie. Damit ist aber der Satz von *Blaschke* — wenigstens für den Fall des Ellipsoides und des einschaligen Hyperboloides — bewiesen.

Es sei abschließend noch erwähnt, daß nach diesem Satz insbesondere die (von der Normalebene eingehüllte) *Polartorse* der Gratlinie einer Umschwungtorse wieder eine Umschwungtorse ist.

§ 11. Algebraische Umschwungtorsen

Abschließend sollen noch für die bei rationaler Frequenz $n = \lambda/\mu$ auftretenden *algebraischen Umschwungtorsen* die Hauptcharaktere bestimmt werden.

Die *Klasse* einer Torse ist bekanntlich die Anzahl der Tangentialebenen, die man aus einem festen Raumpunkt $P(x, y, z)$ an die Fläche legen kann. Man hat also unter den Ebenen (21) jene auszusondern, die P enthalten, d. h. man hat die Gleichung (21) für vorgelegtes x, y, z

nach σ aufzulösen. Dies führt nach Einführung des schon in § 7 verwendeten Parameters $u = e^{i\sigma/\mu}$ auf eine algebraische Gleichung in u mit den Exponenten $\pm\lambda$, $+\mu$, 0, woraus sich die Klasse der Umschwungtorse mit

$$M = 2.\max(\lambda, \mu) \tag{29}$$

bestimmt.

Um die *Ordnung*, d. i. die Anzahl der Schnittpunkte einer allgemeinen Geraden mit der Fläche, zu ermitteln, mag man mittels der aus (21) und (22) zu entnehmenden Ebenenkoordinaten von ε und $\dot{\varepsilon}$ die Plückerkoordinaten

$$\begin{aligned} p_{01} &= \cos\sigma,\ p_{02} = \sin\sigma,\ p_{03} = -c^{-1}, \\ p_{23} &= h.(\sin n\sigma.\sin\sigma + n.\cos n\sigma.\cos\sigma), \\ p_{31} &= h.(\sin n\sigma.\cos\sigma - n.\cos n\sigma.\sin\sigma), \\ p_{12} &= -hn^2.\cos n\sigma \end{aligned}$$

der Erzeugenden berechnen. Nach Übergang zum Parameter $u = e^{i\sigma/\mu}$ liefert die Schnittbedingung mit einer Testgeraden q_{ik} eine algebraische Gleichung in u mit den Exponenten 0, $\pm\mu$, $\pm(\lambda + \mu)$, $\pm(\lambda - \mu)$. Die Ordnung der Umschwungtorse ist demnach

$$N = 2.(\lambda + \mu). \tag{30}$$

Den gleichen Wert erhält man im übrigen für die *Ordnung der Gratlinie* (24), indem man deren Schnittpunkte mit einer Testebene $Ax + By + Cz + D = 0$ abzählt.

Buchbesprechungen

Rätselvolle Mathematik. Von *Eugene P. Northrop.* (Übersetzt von *R. Festa*), 285 S. Wien: Humboldt-Verlag 1954, 85 S.

Dieses Bändchen der verdienstvollen Sammlung „Die Universität" hat einen recht buntscheckigen Charakter, wird aber gerade deshalb viele Freunde finden, denn es gibt Anregungen der verschiedensten Art. Neben typischen Beispielen von Fehlschlüssen — oft trivialer Art — stehen die Paradoxien der Mengenlehre, topologische Fragen, mathematische Spiele u. a. m. Die Darstellung ist stets lebendig und anschaulich, auch wird der Mathematiker von Fach mit dem Ausmaß an Strenge einverstanden sein — mit einer Ausnahme: bei der Behandlung geometrischer Wahrscheinlichkeiten taucht plötzlich (S. 197, Z. 50 u.) ein altes Gespenst auf, das die Mathematiker nun doch seit Jahrzehnten gebannt glaubten: die „unendlich kleine" Größe. Hoffentlich wird das das unwiderruflich letzte Auftreten in einem mathematischen Buch sein! Befremdet hat mich, daß bei dem klassischen Beispiel für die Unzulässigkeit der Oberflächendefinition krummer Flächen durch Grenzübergang vom Polyeder aus im Literaturhinweis nicht *H. A. Schwarz* (1883), sondern ein Mathesis-Aufsatz von 1890 zitiert wird.

Das Büchlein wird nicht nur dem Laien, für den es in erster Linie geschrieben ist, sondern auch dem Mathematiklehrer, dem es reichen Stoff zur Belebung des Unterrichts bietet, gute Dienste leisten. *J. Radon*, Wien

Ali Baba und die 39 Kamele. Ergötzliche Geschichten von Zahlen und Menschen. Von *K. Menninger.* Mit 49 Textabb., 108 S. Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht. 1955. DM 4.80.

Das Buch enthält 9 Geschichten, die jeder, der Humor hat, mit Begeisterung lesen wird. Der mathematische Inhalt ist sehr einfach, aber doch reizvoll. Wer dieses Buch andern schenkt, wird viel Freude bereiten. *N. Hofreiter*, Wien

Aufgabensammlung zur Vektorrechnung. Von *A. Wittig.* (Beihefte für den mathematischen Unterricht: Heft 5.) Mit 27 Textabb., 86 S. Braunschweig: Verlag F. Vieweg & Sohn. 1954. DM 3.90.

Dieses Büchlein bietet mehr als eine Sammlung von 420 Aufgaben. Es enthält 11 Kapitel, und jedes Kapitel zerfällt in drei Unterabteilungen: Einführung, Beispiele, Aufgaben. In der Einführung werden die mathematischen Grundlagen erarbeitet, die zur Bildung eines Begriffes der Vektorrechnung erforderlich sind. Es folgen dann durchgerechnete Beispiele; an diese schließen sich die Übungsaufgaben, und zwar folgen zuerst mathematische Aufgaben, hierauf Aufgaben aus den verschiedensten Gebieten der Physik.

Im ersten Teil, der die Überschrift „Allgemeine Vektorrechnung" trägt, wird ohne Koordinaten gerechnet; in diesem Teil wird die Addition bzw. Subtraktion der Vektoren, das skalare Produkt, das Vektorprodukt, das Spatprodukt, der Entwicklungssatz, die Produkte aus vier und mehr Vektoren und

schließlich die Beziehungen zwischen den Winkeln dreier Vektoren und den Winkeln ihrer Ebenen behandelt. Der zweite Teil befaßt sich mit Ortsvektoren und der Komponentenzerlegung nach drei Grundvektoren. Eine Formelsammlung beschließt dieses Bändchen.

Fachleute und Liebhaber der Vektorrechnung werden dieses Büchlein sehr begrüßen. *J. Laub*, Wien

An Introduction to the Theory of Numbers. Von *G. H. Hardy* and *E. M. Wright*. Dritte Auflage, XVI, 420 S. London: Oxford University Press, Amen House, 1954, 42 s. net.

Das Buch erschien 1938 in erster Auflage und ist aus Vorlesungen hervorgegangen, die die Verfasser in Oxford, Cambridge und anderen Universitätsstädten gehalten haben. Es erfreute sich von Anfang an so großer Beliebtheit, daß es bald vergriffen war. Auch die Bücher der zweiten, 1945 erschienenen Auflage, waren nur kurze Zeit im Buchhandel zu bekommen. Es ist daher sehr erfreulich, daß endlich die dritte Auflage herauskam. Nach dem Tode von *G. H. Hardy* mußte *E. M. Wright* diese Auflage allein herausgeben.

Nach dem Titel des Buches könnte man erwarten, daß das Buch im wesentlichen ein Lehrbuch der elementaren, rationalen Zahlentheorie ist und vielleicht für Studierende der ersten Semester oder für Liebhaber der Zahlentheorie geeignet ist. Es bringt aber weit mehr. Auch ist das Niveau wesentlich höher. Die besonderen Vorzüge des Buches liegen im Inhalt und in der Darstellung. Das Buch ist eine Einführung in die verschiedenen Zweige der Zahlentheorie. Natürlich bringt es die Grundtatsachen der rationalen Zahlentheorie. Darüber hinaus aber führt es in die algebraische, die additive, die analytische und in die geometrische Zahlentheorie ein. So lernt der Leser die Zahlentheorie in quadratischen Zahlkörpern kennen; er lernt verstehen, warum Ideale in der algebraischen Zahlentheorie eingeführt werden. Aus der additiven Zahlentheorie lernt man Partitionen und die Darstellung von Zahlen durch Quadrate, Kuben und höhere Potenzen kennen. Zahlentheoretische Funktionen und Sätze über Primzahlen gehören der analytischen Zahlentheorie an. Im Vergleich zu den ersten zwei Auflagen ist gerade das Kapitel XXII über Primzahlen wesentlich abgeändert worden. Es enthält jetzt den „elementaren" Beweis des Primzahlsatzes, den man *Selberg* verdankt. Mehrere Kapitel bringen wichtige und interessante Sätze über diophantische Approximationen und zur Geometrie der Zahlen. Auch das letzte, diesem geometrischen Zweig der Zahlentheorie gewidmete Kapitel ist in der dritten Auflage wesentlich ergänzt worden und enthält nun den Satz von *Minkowski-Hlawka*.

So lernt der Leser eine Fülle von interessanten Problemen und Sätzen kennen. Selbstverständlich konnten die Einführungen in die verschiedenen Zweige der Zahlentheorie nicht sehr tief gehen. Aber der Leser findet viele Anregungen und Hinweise in den Literaturberichten. Diese wurden bei jeder Neuauflage stets auf den neuesten Stand gebracht.

Besonders erwähnenswert ist die hervorragende Darstellung. Das Buch ist in gleicher Weise für Studierende der Mathematik geeignet, wie für solche, die ihr Universitätsstudium bereits abgeschlossen haben. Die Vorkenntnisse, die vom Leser verlangt werden, sind gering. Abgesehen von den oben erwähnten Änderungen gegenüber den ersten zwei Auflagen, sind noch viele kleine Ergänzungen und Verbesserungen vorgenommen worden. Dieses Buch hat nicht seinesgleichen und steht somit einzig in seiner Art in der mathematischen Literatur da. *N. Hofreiter*, Wien

Mathematics: A third course. Von *M. F. Rosskopf, H. D. Aten, W. D. Reeve.* Mit 140 Textabb., 438 S. New York—Toronto—London: McGraw-Hill Book Company. 1955. s. 26/6.

In diesem Buch wird sehr ausführlich der Stoff der Mathematik behandelt, der für die fünfte und sechste Klasse an unseren Mittelschulen vorgeschrieben ist. Zahlreiche Beispiele aus den verschiedensten Anwendungsgebieten sollen, unterstützt von schönen Zeichnungen, die Erarbeitung des dargebotenen Lehrstoffes ermöglichen. Ein Anhang enthält Potenz-, Wurzel- und Logarithmentafeln.

J. Laub, Wien

Basic Mathematics for Science and Engineering. Von *P. Andres, H. Mises* und *H. Reingold.* VII, 846 S. New York: John Wiley and Sons. — London: Chapman and Hall, 1955, $ 6.75.

Da die Studierenden in USA. — im Vergleich zu europäischen Verhältnissen — in der Regel mit äußerst dürftigen Kenntnissen aus der Mathematik an die Hochschulen kommen, so ist es erforderlich, daß im ersten Semester gründlich Elementarmathematik betrieben wird. Das Buch vermittelt sehr gute Kenntnisse aus der Elementarmathematik und dient als Vorbereitung für Vorlesungen aus Differential- und Integralrechnung, die im 2. und 3. Semester besucht werden. Man kann das Buch nicht mit einem Lehrbuch der Mathematik an unseren mittleren Lehranstalten vergleichen, da die Theorie doch mehr betont wird und der dargebotene Stoff umfangreicher ist. So enthält es: Vektoralgebra, Determinanten 2. und 3. Ordnung und das Einfachste aus der analytischen Geometrie des Raumes. Theorie und Praxis gehen Hand in Hand. Das Buch enthält 7000 Aufgaben, die zum geringen Teil durchgerechnet werden, während bei vielen wenigstens die Lösungen angegeben werden. Die Aufgaben stammen aus reiner und angewandter Mathematik und sind zum Teil äußerst einfach. Die Darstellung ist den Studierenden mit wenig Kenntnissen angepaßt. Wenn auch das Buch amerikanische Verhältnisse voraussetzt, so ist es gewiß auch unseren Studierenden zur Wiederholung und Vertiefung der Kenntnisse aus elementarer Algebra, Trigonometrie und analytischer Geometrie zu empfehlen.

N. Hofreiter, Wien

Principles of Mathematics. Von *C. B. Allendoerfer* und *C. O. Oakly.* XV, 448 S. New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Company, 1955, 37s 6d.

Das Buch — als Grundlage eines Jahreskurses für Anfänger an einem College gedacht — wurde von den Verfassern in der Absicht geschrieben, damit zu einer Reform der mathematischen Grundausbildung beizutragen. Schon in dieser sollen, soweit als möglich, die Methoden und Ergebnisse der neuzeitlichen Mathematik berücksichtigt werden. Deshalb ist Material aufgenommen worden, das auf dieser Stufe sonst kaum behandelt wird (insbesondere findet man ein ziemlich ausführliches Kapitel über mathematische Logik, Abschnitte über Gruppen, Körper und Boole'sche Verbände und eine Einführung in die moderne mathematische Statistik) und deshalb werden auch fundamentale Begriffe exakt und sehr ausführlich auseinandergesetzt (z. B. der Funktionsbegriff, Grenzwerte, Stetigkeit). Dies geht allerdings teilweise auf Kosten des übrigen Stoffes, welcher Gleichungslehre und komplexe Zahlen, Trigonometrie, Exponentialfunktion und Logarithmus, analytische Geometrie, Differential- und Integralrechnung umfaßt; so wird über die Tangenten der Kegelschnitte und die Kegelschnitte

in allgemeiner Lage fast nichts gebracht und bei der Differential- und Integralrechnung beschränkt man sich hauptsächlich auf Polynome.

Der Text ist sehr sorgfältig, ausführlich und gut verständlich geschrieben. In dem Bestreben, dem Studenten ja nicht zu viel zuzumuten, werden viele Sätze ohne Beweis gebracht; die in dem Buch enthaltenen Beweise sind dafür aber zum größten Teil einwandfrei. Zu jedem Verfahren und zu jeder Formel werden durchgerechnete Beispiele gegeben. Die Übungsaufgaben sind fast alle leicht; die numerischen Aufgaben dürften wohl kaum ausreichen, dem Studenten eine angemessene Fertigkeit und Ausdauer im Rechnen zu vermitteln.

Wegen seiner großen Ausführlichkeit scheint das Buch besonders geeignet zum Selbststudium, seine Lektüre ist aber auch dem Mittelschullehrer sehr zu empfehlen. *W. Nöbauer*, Wien

Advanced Calculus. An Introduction to Classical Analysis. Von *L. Brand*. Mit 229 Textabb., XII, 574 S., New York, Wiley, London: Chapman-Hall, 1955, $ 8.50.

Das vorliegende Buch bietet eine Einführung in die höhere Mathematik. Es beginnt mit einer kurzen aber sehr klaren Aufzählung der Körperaxiome sowie dem Aufbau des Systems der reellen Zahlen. Dann folgt ein Kapitel über Zahlenfolgen und Reihen, wo auch einfache Begriffe der Lehre von den Punktmengen erklärt werden. Dann folgen die Eigenschaften der Funktionen von einer reellen Veränderlichen, Stetigkeit, Differenzierbarkeit usw., und das darauffolgende Kapitel behandelt die Funktionen von mehreren Veränderlichen (Differenzierbarkeit, implizite Funktionen, Funktionaldeterminante, gebundene Extrema usw.). Kap. 5 gibt eine sehr verständliche Einführung in die Vektorrechnung mit einigen differentialgeometrischen Anwendungen. Nun folgt die Integralrechnung und zwar beschränkt auf den *Riemann*schen Integralbegriff. Weitere drei Kapitel bringen uneigentliche Integrale, Linienintegrale und mehrfache Integrale. Kap. 10 ist mit „gleichmäßige Konvergenz" überschrieben und bringt u. a. einiges über Gamma- und Beta-Funktion. Den Schluß bildet ein Kapitel über Funktionentheorie und Fouriersche Reihen. Die prägnante (und doch nicht zu kurze) Darstellung hat es dem Verfasser erlaubt, viel zu bringen, was sonst in einem Buch dieser Art, welches Wert auf Exaktheit legt, oft nicht aufgenommen wird. Wir nennen nur einige Beispiele: Mächtigkeitsbetrachtungen über algebraische und transzendente Zahlen, *Kummer*sches und *Gauß*sches Konvergenzkriterium, *Riemann*scher Umordnungssatz, iterative Auflösung von Gleichungen, Satz von *Young* über die Gleichheit der gemischten Ableitungen, *Hadamard*scher Determinantensatz, *Frenet*sche Formeln, Vektoroperationen in krummlinigen Koordinaten, Funktionen beschränkter Schwankung, *Dini*scher Satz über gleichmäßige Konvergenz, komplexe Integration. Die systematische Integration rationaler Funktionen durch Partialbruchzerlegung scheint etwas zu kurz gekommen zu sein, wird jedoch vom Leser en passant erlernt. Zahlreiche oft originelle und interessante Aufgaben mit Angabe der Resultate erhöhen den Wert des Buches bedeutend. Jeder Leser, der eine vielseitige und gründliche Ausbildung in höherer Mathematik wünscht, wird gerne zu diesem Buch greifen, zumal es ihm vielleicht das Studium von zwei oder drei anderen Büchern erspart.

K. Prachar, Wien

Grundzüge und Aufgaben der Differential- und Integralrechnung nebst den Resultaten. Von *H. Dölp* und *E. Netto*. 22. Auflage. 204 S. Berlin: Verlag A. Töpelmann, 1955.

Es gibt wohl kein zweites Buch über Mathematik, das eine 22. Auflage erreicht hat. Das Buch von *Dölp-Netto* erfreut sich nach wie vor größter Beliebtheit. Nach kurzen theoretischen Erklärungen des Stoffes folgen zahlreiche Aufgaben samt ihren Lösungen. Jedem Studierenden der Mathematik ist dringend zu raten, alle Aufgaben dieses Buches bereits im ersten Hochschuljahr durchzurechnen. Die letzte Besprechung erfolgte in dieser Zeitschrift Mh. Math. **42**, 27 (1935). *N. Hofreiter*, Wien

Lehrgang der höheren Mathematik. Teil III, 2. Von *W. I. Smirnow*. (Hochschulbücher für Mathematik, Band 4) mit 85 Textabb. XI, 601 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1955. DM 24.80.

Dieser Band wurde aus dem Russischen nach der 5. Auflage übersetzt und ist ein Lehrbuch der Funktionentheorie mit Anwendungen. Das 1. Kap. bringt einen Abriß der Theorie der Funktionen einer komplexen Variablen. Im 2. Kap. wird zunächst die Theorie der konformen Abbildung dargelegt und dann werden Anwendungen auf Probleme der Hydrodynamik, der Elektrostatik und der Theorie der Schwingungen gegeben. Das 3. Kap. ist der Berechnung bestimmter Integrale, der Darstellung der ganzen und der meromorphen Funktionen, und den *Euler*schen Integralen gewidmet. Das 4. Kap. bringt die wichtigsten Begriffe der Funktionen mehrerer Variablen und die Grundzüge der Funktionen von Matrizen. Wohl werden Differentialgleichungen schon im Band II behandelt, nun (5. Kap.) aber folgt eine Betrachtung der Differentialgleichungen unter allgemeineren Gesichtspunkten. Speziell die linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung werden systematisch untersucht, deren Koeffizienten analytische Funktionen einer komplexen Veränderlichen sind. Ausführlich wird das Verhalten einer Lösung in der Umgebung eines singulären Punktes der Koeffizienten untersucht. Das 6. Kap. bringt zunächst spezielle Funktionen der mathematischen Physik, und zwar die Kugelfunktionen, die Zylinderfunktionen, die Hermiteschen Polynome und die Laguerreschen Polynome. Wieder erfolgt die Untersuchung mit Hilfe der Funktionentheorie. Den Schluß des 6. Kap. bilden die elliptischen Integrale und die elliptischen Funktionen. – Auch dieser Band ist inhaltlich und was die Darstellung betrifft, so wie die anderen bisher erschienenen Bände, ein hervorragendes Lehrbuch. *N. Hofreiter*, Wien

Elemente der Funktionalanalysis. Von *L. A. Ljusternik* und *W. E. Sobolew*. XI, 256 S. (Mathematische Lehrbücher und Monographien, herausgegeben von der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1. Abt. Mathematische Lehrbücher, Bd. 8) Berlin: Akademie-Verlag. 1955. DM 30.—.

Das vorliegende Buch füllt ohne Zweifel eine empfindliche Lücke im deutschen Schrifttum, denn abgesehen von der Monographie von *Schmeidler* ist seit mehr als 10 Jahren über diesen Gegenstand kein Werk in deutscher Sprache erschienen. Die Darstellung gipfelt in den Sätzen über die Spektraldarstellung selbstadjungierter Operatoren und in einem Exkurs in die nichtlineare Funktionalanalysis. (*Fréchet*-Differential und einige Anwendungen). Als besonderes Kennzeichen der Darstellung müssen wohl die vielen Beispiele und Anwendungen hervorgehoben werden. Der aufmerksame Leser wird sich nach der Lektüre in den wichtigsten Funktionen- und Folgenräumen „zu Hause fühlen". Natürlich ist hierzu Kenntnis der Grundzüge der Theorie der reellen Funktionen und der Lebesgueschen Integration- und Maßtheorie Voraussetzung. Es wäre vielleicht wünschenswert, in einer deutschen Ausgabe die etwas einseitigen Literaturangaben zu

ergänzen. Auch erscheint mir stellenweise die Übersetzung nicht so flüssig zu sein wie bei den meisten anderen Büchern in dieser Sammlung. Diese kleinen Bemerkungen sollen aber keineswegs den außerordentlich günstigen Gesamteindruck über das Werk herabmindern. *L. Schmetterer*, Wien

Praxis der Differentialgleichungen. Eine Einführung von *H. v. Sanden*. Vierte, erweiterte Auflage. Mit 21 Textabb., 114 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1955. DM 6.80.

Die ersten drei Auflagen erschienen in rascher Aufeinanderfolge im Kriege (siehe die Besprechung in Mh. Math. **51**, 17). In die vierte Auflage wurde neu ein Abschnitt über Differentialgleichungen aufgenommen. Wie schon der Titel sagt, wird die praktische Nutzanwendung in den Vordergrund gestellt. Das Buch ist daher eine wertvolle Ergänzung zu den Lehrbüchern über Differentialgleichungen, die vorwiegend einen systematischen Aufbau der Theorie bringen. Hier hingegen werden die numerischen Methoden betont. Das Buch beschränkt sich auf gewöhnliche Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung und bringt A) Anfangswertaufgaben, B) Rand- und Eigenwertaufgaben. Zu A) gehören graphische und numerische Methoden, insbesondere das Runge-Kutta-Verfahren und das Differenzenschemaverfahren (hier numerisch-tabellarische Integration genannt). Zu B) werden gebracht: Sätze über Eigenwerte und Eigenfunktionen, das Differenzenverfahren und der Funktionenansatz, insbesondere das Verfahren von *Ritz* und *Ritz-Galerkin*. Das Buch ist ausführlich und leicht verständlich geschrieben und enthält zahlreiche vollständig durchgerechnete Aufgaben aus Physik und Technik. *N. Hofreiter*, Wien

Formelsammlung zur numerischen Behandlung partieller Differentialgleichungen nach dem Differenzenverfahren. Von *D. J. Panow*. 134 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1955, geb. DM 12.—.

Das vorliegende nunmehr auch ins Deutsche übersetzte Buch, von dem schon mehrere russische Aufgaben vorliegen, wendet sich an Ingenieure, denen hier eine Anleitung für die praktische Lösung von oft vorkommenden partiellen Differentialgleichungen ohne theoretische Ableitungen und Erklärungen geboten wird. Behandelt wird vor allem das Differenzenverfahren für die Randwertaufgaben der *Laplace*schen und *Poisson*schen Gleichung mit durchgerechneten Beispielen; für die verwendeten Interpolationsformeln werden Tabellen der Koeffizienten gegeben. Kürzer werden dann die biharmonische Gleichung, die Wärmeleitungsgleichung, die Wellengleichung und quasilineare hyperbolische Systeme, jeweils mit Beispielen besprochen. - Das Buch kommt einem Bedürfnis der Praktiker entgegen und wird sicher viel Anwendung finden.

H. Hornich, Graz

Chance and Choice by Cardpack and Chessboard. An Introduction to Probability in Practise by *Visual Aids*. Band II. Von *L. Hogben*. S. 427—917. London: M. Parrish & Co. 1955.

Dieser Band, der auch durch die fortlaufende Numerierung rein äußerlich als Fortsetzung des ersten Bandes gedacht ist (für Band I vgl. d. Bespr. in Mh. f. Math. **55** (1951), S. 101), ist in didaktischer Hinsicht auf denselben Prinzipien aufgebaut wie der erste Band. Er dringt jedoch wesentlich tiefer in die Materie ein. Daher müssen trotz der Bemühungen des Autors etwas höhere Ansprüche

an das formale Denken des Lesers gestellt werden. Aus dem Stoffgebiet greifen wir die Einführung in die Kovarianzanalyse und die Faktorenanalyse heraus, sowie die Stichprobentheorie aus endlichen Grundgesamtheiten und die wohldurchdachte und behutsame Einführung in die Begriffswelt der Testtheorie und der Schätzungen. Der Text enthält mehrere Stellen, die vom Standpunkt des Mathematikers aus nicht vertretbar sind. Allerdings dürfte der Autor an den mathematisch interessierten Leser zuletzt gedacht haben. Für den breiten Kreis der mathematisch weniger Interessierten, welche die Statistik anwenden, kann das Buch sicherlich empfohlen werden. *L. Schmetterer*, Wien

Stochastic Models for Learning. Von *R. R. Bush* und *F. Mosteller*. XI, 363 S. New York-London: John Wiley & Sons, Chapman & Hall, 1955. $ 9.– .

Die beiden Autoren haben sich schon seit längerer Zeit damit beschäftigt, mathematische Modelle für den Lernvorgang aufzustellen. Sie sind sich durchaus darüber im klaren, daß damit nur eine — sozusagen die quantitative — Seite des Phänomens erfaßt wird. Rein mathematisch gesprochen handelt es sich um das Studium gewisser *Markhoff*scher Ketten mit unendlich vielen Zuständen und der Untersuchung linearer mit den Übergangswahrscheinlichkeiten verknüpfter Operatoren. Den Grundstein zu diesen Untersuchungen hat eine erst kürzlich in den Annals of Math. Statistics von den Autoren veröffentlichte Arbeit gelegt, wobei sie mehr die mathematisch-statistische Seite berücksichtigt haben (Parameterschätzungen, Anwendung des Maximum Likelihood-Prinzip). Die mehr wahrscheinlichkeitstheoretische Seite (asymptotische Eigenschaften, Grenzverteilungen) wurde erst kürzlich von *Karlin* eingehend studiert.

Das Buch zerfällt in zwei Teile, von denen der erste das mathematische Modell behandelt und der zweite die Anwendungen in der Verhaltenspsychologie. Im ersten Teil gehen die Autoren sehr behutsam vor und führen manche Ergebnisse, deren Beweise verhältnismäßig schwierig sind, nur an. Sie bahnen damit auch dem Psychologen den Weg, um zum Verständnis dieser Untersuchungen vorzudringen. Ein gewisses Verständnis für abstrakte Überlegungen ist aber natürlich für die Lektüre unerläßlich. *L. Schmetterer*, Wien

Colloque sur L'Analyse Statistique. (Centre Belge de Recherches mathématiques). 186 S., Paris: Georges Thone, Liége: Masson & Cie. 1955. Fr. 1900.—.

Das Kolloquium vereinte eine Anzahl bedeutender Fachgelehrter aus England, Frankreich, Holland, Italien und dem veranstaltenden Lande. Der zur Verfügung stehende Raum verbietet es, auf Einzelheiten einzugehen, doch muß hervorgehoben werden, daß in insgesamt 10 Vorträgen ein interessanter Ausschnitt aus dem weiten Gebiet der mathematischen Statistik und angrenzender Gebiete geboten wurde. Die Themen betrafen insbesondere statistische Analyse stochastischer Prozesse, nichtparametrische Methoden und die Theorie der Spiele. Je ein Vortrag behandelte die Regressionstheorie und die „philosophischen" Grundlagen der statistischen Schlußweisen. Es versteht sich von selbst, daß der Bericht in die Hand eines jeden Fachmannes gehört. *L. Schmetterer*, Wien

Index mathematischer Tafelwerke und Tabellen aus allen Gebieten der Naturwissenschaften. Bearbeitet von *K. Schütte*. 143 S. München: Verlag R. Oldenbourg 1955. DM 14.50.

Die praktische Anwendung mathematischer Kenntnisse erfordert stets die Benutzung von Tafelwerken. Bei der großen Zahl der Tafelwerke entstand

das Bedürfnis nach einem Nachschlagewerk. Das vorliegende Buch kommt diesem Bedürfnis entgegen. Es zeichnet sich durch zweckmäßige und übersichtliche Einteilung der Tafelwerke aus. Aufgezählt werden Tafeln für numerisches und graphisches Rechnen, harmonische Analyse, Logarithmentafeln, Tafeln von wichtigen einfachen Funktionen, ferner elliptische Funktionen und Integrale, Kugel- und Zylinderfunktionen, Integraltafeln, Tafeln für die Anwendung in Physik, Chemie, Technik, Astronomie, Geodäsie und Meteorologie. Das Buch enthält 1200 Titel und ist ein wertvoller Ratgeber für angewandte Mathematiker, Naturwissenschaftler und Ingenieure. Vorwort und Inhaltsverzeichnis sind in deutscher und englischer Sprache abgefaßt.

N. Hofreiter, Wien

Projektive Ebenen. Von *G. Pickert* („Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete", Band LXXX). Mit 60 Textabb., VIII, 343 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1955. Geb. DM 48.60.

Aus der Untersuchung der Grundlagen der ebenen projektiven Geometrie entspringend, hat sich in den letzten 25 Jahren die Lehre von den projektiven Ebenen als Inzidenzstrukturen mit gewissen Eigenschaften entwickelt. Diese Entwicklung ist gegenwärtig noch in vollem Gang; wegen der großen Mannigfaltigkeit des bisher vorliegenden, weit verstreuten Materiales über das Gebiet ist jedoch eine zusammenfassende Darstellung des heutigen Standes der Forschung außerordentlich zu begrüßen. Welch gewaltige Fülle an Stoff in diesem Buch verarbeitet wurde, zeigt schon ein Blick auf das Literaturverzeichnis, das nicht weniger als 236 Nummern umfaßt. Es ist dabei dem Verfasser doch gelungen, einigermaßen Ordnung in die Vielfalt der Begriffe und Sätze zu bringen, so daß das Buch durchaus nicht den Charakter eines reinen Ergebnisberichtes mit Beweisen hat, sondern auch tatsächlich lesbar ist. Die Darstellung ist wohl knapp, aber doch verständlich; für Anfänger ist das Buch ja seiner ganzen Anlage nach ohnedies nicht bestimmt.

Im wesentlichen sind es drei Begriffe, um die sich der gesamte Inhalt des Buches gruppiert: Der der projektiven und affinen Ebenen mit ihren verschiedenen Spezialisierungen, der des Schließungssatzes (Aussage von bestimmter Form über Punkte und Gerade einer Inzidenzstruktur) und der der algebraischen Struktur mit seinen zahlreichen Spezialfällen und seinen mannigfachen Beziehungen zu den projektiven Ebenen. Die Anordnung des Materials ist aus den Kapitelüberschriften zu erkennen: Grundbegriffe, Gewebe, der Satz von *Desargues*, Desargues'sche Ebenen, der Satz von *Pappos*, Alternativkörper, *Moufang*-Ebenen, Translationsebenen, angeordnete Ebenen, topologische Ebenen, *Möbius*-Netze, endliche Ebenen, Anhang.

Es braucht kaum betont zu werden, daß dieses Buch künftig für jeden, der auf diesem Gebiet arbeitet, unentbehrlich sein wird. Man kann wohl sicher erwarten, daß es vielfach Anregung zu weiteren Untersuchungen geben wird.

W. Nöbauer, Wien

The Real Projective Plane. Von *H. S. M. Coxeter*. 2. Aufl. Mit Textabb., XII u. 226 S. Cambridge: At the University Press 1955. 27 s. 6 d. net.

Reelle projektive Geometrie der Ebene. Von *H. S. M. Coxeter*. Nach der 2. Aufl. übersetzt von *W. Burau*. (Mathematische Einzelschriften, Bd. 3) 190 S. München: R. Oldenbourg, 1955. DM 18.60.

Hier liegt eine streng axiomatisch aufgebaute synthetische Geometrie der reellen Ebene vor, die von der projektiven über die affine zur Euklidischen Geometrie führt und schließlich mit der Einführung von Koordinaten in die Analytische Geometrie einmündet. Besonders hervorzuheben ist die Behandlung der Stetigkeit, die zunächst durch einen Fixpunktsatz von *Enriques*, der als Stetigkeitsaxiom eingeführt wird, definiert wird, was für den Beweis des Fundamentalsatzes von Vorteil ist. Erst nach dem Aufbau der Euklidischen Geometrie wird in einem besonderen Kapitel die Stetigkeit auf Grund des Axioms, daß jede monotone Punktfolge auf einer Geraden einen Grenzpunkt hat, von neuem behandelt (wobei sowohl Monotonie als Grenzpunkt nur mit Hilfe des projektiven Begriffs der Trennung von Punktpaaren definiert wird). Es wird gezeigt, daß sich sowohl der Satz von *Enriques*, wie die Axiome von *Archimedes* und *Dedekind* aus diesem Axiom ableiten lassen. Die Kegelschnitte werden nach *v. Staudt* von der Polarität aus eingeführt. Kegelschnittbüschel werden so definiert, daß nur diejenigen Fälle erfaßt werden, in denen ein gemeinsames Polardreieck existiert (einfache Elementarteiler), was im Zusammenhang der synthetischen Darstellung gewiß zweckmäßig, aber, worauf der Autor in dem Kapitel über Koordinaten auch hinweist, bei der analytischen Behandlung nicht allgemein genug ist. Zahlreiche Aufgaben dienen zur Kontrolle und Befestigung der Kenntnisse des Lesers, dem der Verf. es auch dadurch leicht macht, daß er ausführlich und klar schreibt und am Anfang jedes Kapitels eine Übersicht über die Zielsetzung gibt. Das Buch bedeutet einen Gewinn für unsere geometrische Literatur und sein Studium kann nicht nachdrücklich genug empfohlen werden. *J. Radon*, Wien

Cours de Géometrie Infinitésimale. 3. Heft, 1. Teil. Von *G. Julia*. Zweite Auflage. 220 S. Paris: Gauthier-Villars. 1955.

Von der Neubearbeitung von *Julia*'s Vorlesungen an der Ecole Polytechnique liegt nunmehr ein weiterer Teil vor (vgl. die Besprechungen Mh. 59, S. 158 und S. 247). Mit ihm beginnt die eigentliche Differentialgeometrie und in seinen ersten Kapiteln wird zunächst die Theorie der Kurven und Flächen vom Standpunkt der Topologie der (genügend oft differenzierbaren) Mannigfaltigkeiten aus entwickelt: Berührung, Einhüllende, Berührungstransformationen. Die letzteren werden von den Leitgleichungen aus behandelt und es wird hier auch der Fall beliebig vieler Dimensionen gestreift. Hieran schließt sich die Theorie der Geradenscharen im Raum, von der nur die einfachsten Tatsachen übermittelt werden, der lineare Komplex findet aber eine eingehendere Behandlung. Dann folgt die Kurventheorie, die mit der Betrachtung der oskulierenden Geraden, Ebenen, Kreise und Kugeln einsetzt und dann erst die Formeln von *Frenet* herleitet. Auch hier werden nur die einfachsten Dinge behandelt, die ausführliche Theorie bleibt den folgenden Heften vorbehalten.

Dieser kurze Bericht zeigt, daß man in dem klar und leicht verständlich geschriebenen Buch manches findet, was die üblichen Darstellungen übergehen. Es kann unseren Studierenden warm empfohlen werden. *J. Radon*, Wien

Cours de Géometrie Infinitésimale. Heft 5, 2. Teil. Von *G. Julia*. 145 S. Paris: Verlag Gauthiers-Villars, 1955.

Das vorliegende Heft umfaßt die Flächentheorie im Umfang einer einführenden Vorlesung und enthält auch ein Kapitel über Strahlenkongruenzen, worin der Verf. Gelegenheit nimmt, eigene Untersuchungen über die singulären Geraden darzustellen. Die analytische Behandlung geschieht nach dem Vorbild

von *Gauß* und *Darboux*, die neueren Methoden (Tensor Kalkül, alternierende Differentialformen) werden nicht benützt. Zahlreiche interessante Beispiele beleben die Darstellung, die auch dem Fortgeschrittenen manches Interessante zu bieten hat, vor allem aber eine musterhaft klare und gut lesbare Einführung bildet. *J. Radon*, Wien

Nichteuklidische Geometrie. Von *H. Meschkowski*. (Beihefte für den mathematischen Unterricht: Heft 4.) Mit 65 Textabb., 80 S. Braunschweig: Verlag F. Vieweg & Sohn. 1954. DM 3.40.

Das Büchlein gibt eine Einführung in die nichteuklidische Geometrie. Als Vorbereitung werden die Hilbert'schen Axiome behandelt und ein Abriß aus der Geschichte des Parallelenpostulates gegeben. Nach einer Einführung in das Poicarésche Modell werden elementare Sätze der hyperbolischen Geometrie bewiesen, einfache Konstruktionen durchgeführt und die wichtigsten Formeln der hyperbolischen Trigonometrie abgeleitet. Den Schluß bildet eine kurze Einführung in die elliptische Geometrie.

Für Schüler unserer Mittelschulen wird wohl dieses Büchlein kaum in Frage kommen. Es sei vielmehr den Mathematik-Studierenden empfohlen.

J. Laub, Wien

Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung. Von *A. Duschek* und *A. Hochrainer*. III. Teil. Anwendungen in Physik und Technik. Mit 25 Textabb., VI, 250 S. Wien: Springer-Verlag, 1955. S 144.—, DM 24.—, $ 5.70, sfr. 24.50.

Die ersten 2 Teile brachten die Tensoralgebra und die Tensoranalysis und wurden in Mh. Math. **52**, 86 (1948) und **54**, 158 (1950) ausführlich besprochen. Der dritte Teil ist den Anwendungen in der Physik und Technik gewidmet. An zahlreichen Problemen wird gezeigt, was man mit den Methoden der Tensorrechnung behandeln kann. Es sind dies vor allem: Mechanik des Massenpunktes, Mechanik des starren Körpers, Elastizitätstheorie, Mechanik der Flüssigkeiten, Wärmelehre, Elektrostatik, elektrische Ströme, elektromagnetische Felder, spezielle und allgemeine Relativitätstheorie. Die Abschnitte über Elastizitätstheorie und Relativitätstheorie wurden von *A. Duschek*, alle übrigen von *A. Hochrainer* verfaßt. Die schon in den ersten zwei Büchern bewährte Darstellung wurde beibehalten. Besonders hervorgehoben seien die 2 Paragraphen über Doppelfelder, in denen eine Reihe von Eigenschaften der später behandelten physikalischen Felder einheitlich dargestellt wird. *N. Hofreiter*, Wien

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien, IV., Schelleingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges. m. b. H., Innsbruck, Innrain 27–29

Begründung der Funktionentheorie auf alten und neuen Wegen.

Von Dr. **Lothar Heffter,** Professor an der Universität Freiburg. Mit 13 Abbildungen im Text. VIII, 63 Seiten. Gr.-8°. 1955. Steif geheftet DM 12.60

Aus dem Vorwort: Abschnitt A bringt Vorkenntnisse, die unmittelbar oder mittelbar wirklich benutzt werden, und zwar mit Beweisen der angeführten Sätze. Der Hauptabschnitt B bringt sechs verschiedene ältere, neuere und ganz neue Eingänge in die Funktionentheorie. Abschnitt C stellt einen Beitrag zur Geschichte der Begründung der Funktionentheorie dar in Gestalt einer reichhaltigen, chronologisch geordneten Liste einschlägiger Originalliteratur, jeweils mit kurzen Inhaltsangaben.

Acht- und neunstellige Tabellen zu den elliptischen Funktionen. - Eight and nine place tables of elliptical Functions.

Dargestellt mittels des Jacobischen Parameters q von Dr.-Ing. **M. Schuler,** Professor Emeritus, Universität Göttingen, **H. Gebelein,** Dr. phil. habil., Dozent, Bamberg. Mit einem englischen Text von Lauritz S. Larsen, B. S. Mit 11 Abbildungen. XXIV, 296 Seiten. 4°, 1955. Ganzleinen DM 58.—.

Inhaltsverzeichnis (deutsch und englisch): Vorwort. Inhaltsverzeichnis. Einführung. Tabelle I: Funktionen $G\,(q^4, z)$ laufend nach z (mit Angabe der zugehörigen Werte q und Θ). Tabelle II: Funktionen $G\,(q^4, z)$ laufend nach q^4. Zugehörige Werte q und Θ zusammengestellt. Tabelle III: Funktionen $H(q^3, z)$ laufend nach z (mit Angabe der zugehörigen Werte q und Θ). Tabelle IV: Funktionen $H\,(q^3, z)$ laufend nach q^3. Zugehörige Werte q und Θ zusammengestellt. Tabelle V: Jacobische elliptische Funktionen laufend nach z (mit Angabe der zugehörigen Werte Θ, $-\lg\cos\Theta = \lg k'$, K und K/E). Tabelle VI: Jacobische elliptische Funktionen laufend nach q. Zugehörige Werte für $-\lg k'$ und Θ. Zugehörige Werte für K und K/E. Tabelle VII: Tafeln für die Umrechnung zwischen dem Legendreschen Modul Θ und dem Jacobischen Parameter q.

Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete.

Unter Mitwirkung der Schriftleitung des „Zentralblatt für Mathematik" herausgegeben von **L. V. Ahlfors, R. Baer, R. Courant, J. L. Doob, S. Eilenberg, P. R. Halmos, T. Nakayama, H. Rademacher, F. K. Schmidt, B. Segre, E. Sperner.** Neue Folge.

Siebentes Heft: **Additive Zahlentheorie.** Von Professor Dr. **Hans-Heinrich Ostmann,** Berlin. Erster Teil: Allgemeine Untersuchungen. Mit 1 Textabbildung. VII, 233 Seiten. Gr.-8°. 1955. DM 29.80

Inhaltsübersicht: Der Summenbegriff; allgemeine Eigenschaften. Mengen mit Relativnullen. Basismengen. Zusammenhang mit DIOPHANTIschen Gleichungen. Die FERMATsche Vermutung: Verallgemeinerungen von Σ. Anzahlfunktion, Kompositionen, Partitionen. Die verschiedenen Dichtenbegriffe. Anzahlfunktion reduzibler Mengen. Die zweigliedrige obere asymptotische Dichte. Die arithmetischen (finiten) Dichten reduzibler Mengen. Die asymptotischen Dichten reduzibler Mengen. Die Genauigkeit der Abschätzungen. Basen endlicher Ordnung. Minimalbasen. Wesentliche Komponenten. Weitere Zusammenhänge mit den zugeordneten dyadischen Reihenentwicklungen.

Soeben erschien:

Die Maßsysteme in Physik und Technik.

Kritische Untersuchung der Grundlagen zur Aufstellung einwandfreier Maßsysteme und Vergleich der bestehenden Systeme in Physik und Technik. Von Dipl.-Ing. Dr. techn. **Günther Oberdorfer,** o. ö. Professor an der Technischen Hochschule Graz. VI, 140 Seiten. Gr.-8°. 1956.

Steif geheftet S 96.—, DM 16.—, sfr. 16.30, $ 3.80

Das vorliegende Buch zeigt die natürlichen und determinierten Bedingungen zur Bildung richtiger und brauchbarer Maßsysteme auf und wendet sich dabei an alle Kreise der praktischen und theoretischen Technik und Physik. Es wird versucht, das Problem aller Spekulationen zu entkleiden und die klaren physikalischen Grundlagen und Notwendigkeiten herauszustellen, die allein zu einer einfachen, dauernden und befriedigenden Lösung des Fragenkomplexes führen können. Diese kann nicht nur über vermeintliche Zweckmäßigkeiten, sondern nur durch die physikalisch aufgezwungenen Erfahrungen gefunden werden.

Acta Physica Austriaca.

Unter Mitwirkung der Österreichischen Akademie der Wissenschaften herausgegeben von **Fritz Regler,** Wien, und **Hans Thirring,** Wien. Schriftleitung: **Paul Urban,** Graz.

Zuletzt erschien:

Band 10, Heft 1—2. (Abgeschlossen im Januar 1956.) Mit 61 Textabbildungen. 168 Seiten. 1956. S 234.—, DM 39.—, sfr. 40.—, $ 9.30

Inhaltsverzeichnis: **Hörl, E.** und **F. Stangler.** Feldelektronenmikroskopische Schirmbilder bei Anwesenheit organischer Dämpfe im Versuchsrohr. — **Braun, G.** Zur Methode der stationären Phase. — **Krzywoblocki, M. Z. v.** and **G. Shinosaki.** On Drag of Some Bodies in Free Molecule Flow. — **Schneider, W. H.** Die Plasma-Kenngrößen einer Quecksilber-Niederdruck-Entladung mit mehreren Elektronengruppen. — **Hittmair, O.** Winkelkorrelationen. — **Melan, E.** Wärmespannungen bei der Abkühlung einer Kugel. — **Penfield, R. H.** and **H. Zatzkis.** On the Determination of the Equations of Motion from a General, Covariant, Non-linear Field Theory by the Approximation Method of *Einstein, Infeld* and *Hoffmann.* — **Kassecker, T.** und **P. Urban.** Über die Berechnung von Kernmomenten nach dem Schalenmodell. — **Herglotz, H.** und **E. Deimel.** Über die Abhängigkeit des Röntgenspektrums von der chemischen Bindung. — **Roth, H.** Pressure Distribution on a Wall under Impact of a Subsonic Gas Jet. — **Haefer, R.** Zur experimentellen Prüfung der wellenmechanischen Theorie der Feldelektronenemission. **Buchbesprechungen.**